Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht

Einführung in die Statistik Herbstsemester 2018

Übungsblatt 5.

zu bearbeiten bis: **Freitag, 25.10.2018, 12:00 Uhr.**

Aufgabe 1 (Geh aufs Ganze | 4 Punkte)**.**

Das Finale der Spielshow "Geh aufs Ganze", einer Adaption der amerikanischen Spielshow "Let's make a deal", läuft wie folgt ab: Der Spieler muss zwischen drei Türen wählen. Hinter einer der Türen befindet sich der Hauptgewinn, hinter den anderen beiden Nieten. Nachdem der Spieler sich für eine der Türen entschieden hat, öffnet der Moderator eine der anderen Türen – und zwar eine, hinter der sich eine Niete befindet. Dem Spieler wird nun die Gelegenheit gegeben, seine Entscheidung noch einmal zu ändern.
Wie soll sich der Spieler verhalten? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (Erwartungswert | 4 Punkte)**.**

Betrachten Sie das folgende Glücksspiel: zu Beginn zahlen Sie dem Veranstalter einen einmaligen Einsatz von c Franken. Der Veranstalter wirft nun so lange mit einer fairen Münze, bis zum ersten Mal *Kopf* erscheint. Sei k die Anzahl der dazu notwendigen Versuche. Der Veranstalter zahlt Ihnen nun 2^{k-1} Franken aus.

a) Was ist der *faire* Wert des Einsatzes c, d.h. bestimmen Sie c so, dass der *erwartete* Gewinn des Spieles für beide Parteien 0 ist. Empfinden Sie das Ergebnis als intuitiv oder überraschend?

b) Nehmen sie an, der Veranstalter heisst Bill Gates. Er haftet dabei mit seinem Gesamtvermögen von $v = 96\,000\,000\,000$ Franken, d.h. er muss Ihnen statt 2^{k-1} jeweils nur $\min\{2^{k-1}, v\}$ zahlen. Was ist nun der faire Einsatz, wenn man die Obergrenze der Zahlungsfähigkeit von Herrn Gates in Betracht zieht?

Aufgabe 3 (Tschebyscheffsche Ungleichung | 4 Punkte)**.**

a) Eine Whisky-Brennerei brennt jede Woche eine gewisse Menge Jungwhisky, dieser wird dann in X Fässer gefüllt um eine 16-jährige Fassreifung zu erfahren. Aufgrund von Schwankungen in den Brau- und Brennprozessen ist X eine Zufallsgrösse auf den natürlichen Zahlen mit dem Erwartungswert $E(X) = 100$ und der Varianz $V(X) = 20$.

   Geben Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Woche n Fässer gefüllt werden, wobei $n \in [90, 110]$.

b) Sei X eine Zufallsgrösse, für welche $E(X^2)$ existiert, dann gilt

$$0 \leq P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

   (nach der Tschebyscheffschen Ungleichung).

   Zeigen Sie, dass diese Schranken für $k > \sqrt{V(X)}$ scharf sind, d.h. es existieren Zufallsgrössen X_1, X_2 mit

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X) \quad \text{und} \quad V(X_1) = V(X_2) = V(X),$$

   so dass

$$0 = P(|X_1 - E(X_1)| \geq k) \quad \text{und} \quad P(|X_2 - E(X_2)| \geq k) = \frac{V(X)}{k^2}.$$

Aufgabe 4 (Simple Random Walk | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten folgendes Spiel: Eine faire Münze wird n–mal geworfen. Pro Wurf setzen Sie x Franken ein. Bei Kopf erhalten Sie Ihren Einsatz zurück und bekommen nochmals x Franken, bei Zahl verlieren Sie Ihren Einsatz. Der Gewinn/Verlust im i–ten Wurf wird beschrieben durch die Zufallsgrösse $X_i : \Omega \to \{-x, x\}$. Der Gesamtgewinn/–verlust nach dem i–ten Wurf wird dann beschrieben durch die Zufallsgrösse $S_i := \sum_{j=1}^{i} X_j$ (mit $S_0 := 0$).

a) Sind S_i und S_{i+1} unabhängig? (Begründung oder Gegenbeispiel!)

b) Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $P(S_i = kx) > 0$. Zeigen Sie: Unter der Bedingung $S_i = kx$ sind S_{i-1} und S_{i+1} unabhängig.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_i.