Übungsblatt 10.

Abgabe bis: **Freitag, 30.11.2018, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1 (Konsistenz I | 4 Punkte)**.**

a) Für welche Grundgesamtheit X ist der erwartungstreue Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := X_1$$

der Funktion $\tau(\vartheta) = E_\vartheta(X)$ auch konsistent?

b) Zeigen Sie: Für eine beliebige Grundgesamtheit X ist der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \overline{X}_n + \frac{1}{n}$$

für $\tau(\vartheta) = E_\vartheta(X)$ konsistent, aber nicht erwartungstreu.

Aufgabe 2 (Konsistenz II | 2 Punkte)**.**

Sei X eine $\text{Bin}(m, p)$-verteilte Grundgesamtheit mit $0 < p < 1$ und ansonstem unbekannten m und p. Finden Sie einen konsistenten Schätzer $T(X_1, \ldots, X_n)$ für $\tau(\vartheta) = m$ und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 3 (Maximum-Likelihood I | 6 Punkte)**.**

Ein Gen trete in einer Population in zwei Auspägungen aus: A mit relativer Häufigkeit p und a mit relativer Häufigkeit $1 - p$. Bei unabhängiger Paarung ("im Gleichgewicht") treten die Genotypen $X_1 = AA$, $X_2 = Aa$ und $X_3 = aa$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\pi_1 = p^2$, $\pi_2 = 2p(1 - p)$ und $\pi_3 = (1 - p)^2$ auf. Bei einer Studie von 250 Individuen tritt AA bei 25 Individuen auf, Aa bei 100 Individuen und aa bei 125 Individuen.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode einen Schätzer $\widehat{p}$ für p. Was ist im obigen Fall der Wert von $\widehat{p}$?

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode einen Schätzer $\widehat{\pi}_1$ für π_1. Was ist im obigen Fall der Wert von $\widehat{\pi}_1$?

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $z := \sqrt{\pi_1}$.

Aufgabe 4 (Maximum-Likelihood II | 2 Punkte)**.**

Sei X eine auf dem Intervall $[0, C]$ verteilte Grundgesamtheit. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{C}$ für das Intervallende C.
Hinweis: Weder $\widetilde{L}(C) = \log L(C)$ *noch* $\widetilde{L}'(C)$ *sind hier hilfreich. Überlegen Sie sich anschaulich, was*

$$\arg\max_{C>0} L(C)$$

sein könnte!

Aufgabe 5 (Varianz | 2 Punkte)**.**

Sei X eine Zufallsgrösse mit $E(X^2) < \infty$. Beweisen Sie, dass

$$V(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} E\big((X-a)^2\big)$$

gilt, wobei das eindeutige Minimum für $a = E(X)$ angenommen wird.