

Numerische Methoden für stochastische PDEs

Skript zur Vorlesung
im
Frühjahrssemester 2014

Helmut Harbrecht

Stand: 29. Mai 2014

Vorwort

Diese Mitschrift kann und soll nicht ganz den Wortlaut der Vorlesung wiedergeben. Sie soll das Nacharbeiten des Inhalts der Vorlesung erleichtern. Den Inhalt der Vorlesung habe ich, neben verschiedener Spezialliteratur, vor allem dem Lehrbuch

R. Ghanem and P. Spanos: *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Revised Edition, Dover Publishing, Mineola, New York (2003)

entnommen. Die Konvergenzuntersuchungen der Karhunen-Lòeve-Entwicklung in Kapitel 9 basieren auf dem Artikel

C. Schwab und R.A. Todor: Karhunen-Lòeve Approximation of Random Fields by Generalized Fast Multipole Methods. *J. Comput. Phys.* **217** (2006), 100–122.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	6
2	Grundlagen	7
2.1	Sobolev-Räume	7
2.2	Variationsformulierung	9
2.3	Wahrscheinlichkeitsräume	13
2.4	Zufallsgrößen	16
3	Stochastische partielle Differentialgleichungen	19
3.1	Variationsformulierung stochastischer PDEs	19
3.2	Stochastische Lastvektoren	21
3.3	Stochastische Diffusionskoeffizienten	24
4	Polynomiales Chaos	29
4.1	Allgemeine Orthogonalpolynome	29
4.2	Eindimensionale Chaospolynome	33
4.3	Mehrdimensionale Chaospolynome	35
4.4	Stochastische Approximation	37
5	Karhunen-Loève-Entwicklung	43
5.1	Eigenwerte symmetrischer kompakter Operatoren	43
5.2	Hilbert-Schmidt-Operatoren	46
5.3	Singulärwertzerlegung	48
5.4	Anwendung auf stochastische Felder	53
5.5	Numerische Behandlung stochastischer Diffusionskoeffizienten	54
5.6	Abklingverhalten der Eigenwerte	56
5.7	Abschneidefehler	62
5.8	Lemma von Strang	65
6	Pivotisierte Cholesky-Zerlegung	68
6.1	Über die Cholesky-Zerlegung	68
6.2	Niedrigrangapproximation	69
6.3	Berechnung zweiter Momente	72
6.4	Verallgemeinerte Eigenwertprobleme	73
7	Monte-Carlo-Verfahren	75
8	Hochdimensionale Quadratur	79
8.1	Trapezsumme revisited	79

8.2	Tensorprodukt-Quadratur	81
8.3	Dünngitter-Quadratur	82
9	Konvergenzanalyse des polynomialen Chaos	86
9.1	Stochastische Regularität	86
9.2	Stochastische Diskretisierung	88

1. Motivation

Elliptische partielle Differentialgleichungen

$$\mathcal{L}u = f \text{ in } D, \quad u = 0 \text{ auf } \partial D$$

können heutzutage im Prinzip beliebig genau numerisch gelöst werden. Das Arbeitstier hierbei ist die Finite-Elemente-Methode.

Allerdings sind hochgenaue Berechnungen oftmals fragwürdig, da die Eingabeparameter *unsicher* sind. Unsicherheiten in den Eingabeparameter können von den Materialkonstanten, dem Lastvektoren oder sogar dem Rechengebiet herrühren. Solche unsicheren Eingabeparameter können mit Hilfe der Stochastik modelliert werden. Natürlich wird dann der Ausgangsparameter, das ist die Lösung u , ebenfalls stochastisch.

Zur stochastischen Modellierung benötigt man zuerst die Menge Ω aller möglichen zufälligen Ereignisse. Ferner muss auf dieser Menge eine geeignete σ -Algebra und ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert werden. Bezeichnet $\omega \in \Omega$ jeweils eine spezielle Realisierung, dann erhält nun eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(\omega)u(\omega) = f(\omega) \quad \text{in } D(\omega) \\ u(\omega) = 0 \quad \quad \quad \text{auf } \partial D(\omega) \end{array} \right\} \omega \in \Omega. \quad (1.1)$$

Hierbei treten folgende Fragestellungen auf:

- In welchem Sinne ist die stochastische partielle Differentialgleichung (1.1) zu verstehen?
- Existiert eine Lösung und ist diese eindeutig?
- Wie berechne ich diese Lösung numerisch?

Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir Antworten auf diese Fragestellungen geben, wobei Ergebnisse aus der Stochastik und der Numerik Verwendung finden werden. Hauptanliegen ist es jedoch, *deterministische* Algorithmen zur Lösung von (3.1) zu entwickeln.

2. Grundlagen

2.1 Sobolev-Räume

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet (also eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^d) mit stückweise glattem Rand. Der Funktionenraum $L^2(D)$ besteht aus allen Funktionen, die über D quadratisch Lebesgue-integrierbar sind. Dabei werden zwei Funktionen miteinander identifiziert, wenn $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in D$ abgesehen von einer Nullmenge gilt. Durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(D)} := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wird $L^2(D)$ zu einem Hilbert-Raum mit der Norm

$$\|u\|_{L^2(D)} := \sqrt{(u, u)_{L^2(D)}} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}.$$

Definition 2.1 Die Funktion $u \in L^2(D)$ besitzt die (**schwache**) **Ableitung** $v = \partial^\alpha u$, falls $v \in L^2(D)$ und

$$(v, \phi)_{L^2(D)} = (-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha \phi) \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(D)$$

gilt.

Hier bezeichnet $C^\infty(D)$ den Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen und $C_0^\infty(D)$ den Unterraum der Funktionen, die nur auf einer kompakten Teilmenge von D von 0 verschiedene Werte annehmen.

Bemerkung Ist $u \in C^1(D)$, dann liefert der Gaußschen Integralsatz

$$(\partial_{x_i} u, \phi)_{L^2(D)} + (u, \partial_{x_i} \phi)_{L^2(D)} = \int_D \partial_{x_i} (u\phi) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial D} u\phi n_i \, d\sigma,$$

wobei $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ die nach außen gerichtete Normale an das Gebiet D bezeichnet. Folglich ist

$$(\partial_{x_i} u, \phi)_{L^2(D)} = -(u, \partial_{x_i} \phi)_{L^2(D)} \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(D),$$

das heißt, die schwache Ableitung stimmt mit der üblichen überein. \diamond

Definition 2.2 Für ganzzahliges $m \geq 0$ bezeichne der **Sobolev-Raum** $H^m(D)$ die Menge aller Funktionen u in $L^2(D)$, die schwache Ableitungen $\partial^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m$ besitzen. In $H^m(D)$ wird durch

$$(u, v)_{H^m(D)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(D)}$$

ein Skalarprodukt mit der zugehörigen der Norm

$$\|u\|_{H^m(D)} := \sqrt{(u, u)_{H^m(D)}} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(D)}^2}$$

erklärt. Durch

$$|u|_{H^m(D)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(D)}^2}$$

wird die **$H^m(D)$ -Seminorm** definiert.

Mit der Norm $\|\cdot\|_{H^m(D)}$ ist $H^m(D)$ vollständig, also ein Hilbert-Raum. Oftmals wichtig ist die Eigenschaft, dass $C^\infty(D) \cap H^m(D)$ dicht in $H^m(D)$ liegt.

Definition 2.3 Die Vervollständigung von $C_0^\infty(D)$ bezüglich der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{H^m(D)}$ wird mit $H_0^m(D)$ bezeichnet.

Offensichtlich ist der Hilbert-Raum $H_0^m(D)$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^m(D)$. Außerdem ist $H_0^0(D) = L^2(D)$, so dass sich folgendes Schema ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} L^2(D) & = & H^0(D) & \supset & H^1(D) & \supset & H^2(D) & \supset & \dots \\ & & \parallel & & \cup & & \cup & & \\ & & H_0^0(D) & \supset & H_0^1(D) & \supset & H_0^2(D) & \supset & \dots \end{array}$$

Satz 2.4 (Poincaré-Friedrichsche Ungleichung) Sei D in einem n -dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten. Dann ist

$$\|v\|_{L^2(D)} \leq s|v|_{H^1(D)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(D).$$

Beweis. Da $C_0^\infty(D)$ dicht in $H_0^1(D)$ ist, genügt es, die Ungleichung für $v \in C_0^\infty(D)$ zu beweisen. Wir können $D \subset \square := \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : 0 < x_i < s\}$ annehmen und $v(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \square \setminus D$ setzen. Es folgt

$$v(x_1, x_2, \dots, x_d) = \underbrace{v(0, x_2, \dots, x_d)}_{=0} + \int_0^{x_1} \partial_{x_1} v(t, x_2, \dots, x_d) dt$$

und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung weiter

$$|v(\mathbf{x})|^2 \leq \left(\int_0^{x_1} 1^2 dt \right) \left(\int_0^{x_1} |\partial_{x_1} v(t, x_2, \dots, x_d)|^2 dt \right) \leq s \int_0^s |\partial_{x_1} v(t, x_2, \dots, x_d)|^2 dt.$$

Da die rechte Seite unabhängig von x_1 ist, ergibt sich

$$\int_0^s |v(\mathbf{x})|^2 dx_1 \leq s^2 \int_0^s |\partial_{x_1} v(\mathbf{x})|^2 dx_1.$$

Schließlich wird über die anderen Koordinaten integriert:

$$\int_{\square} |v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq s^2 \int_{\square} |\partial_{x_1} v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq s^2 |v|_{H^1(D)}^2.$$

□

Durch die Anwendung der Poincaré-Friedrichschen Ungleichung auf Ableitungen erkennt man, dass

$$|\partial^\alpha v|_{L^2(D)} \leq s |\partial_{x_i} \partial^\alpha v|_{L^2(D)} \quad \text{für } |\alpha| \leq m-1, v \in H_0^m(D)$$

gilt. Durch Induktion erhält man

Korollar 2.5 Wenn D beschränkt ist, sind in $H_0^m(D)$ die Normen $\|\cdot\|_{H^m(D)}$ und $|\cdot|_{H^m(D)}$ äquivalent. Ist D in einem Würfel der Kantenlänge s enthalten, ist

$$|v|_{H_0^m(D)} \leq \|v\|_{H^m(D)} \leq (1+s)^m |v|_{H_0^m(D)} \quad \text{für } v \in H^m(D).$$

2.2 Variationsformulierung

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$-\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} (\alpha(\mathbf{x}) \partial_{x_i} u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in D, \quad u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial D$$

mit $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} < \infty$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Mit Hilfe der Differentialoperatoren

$$\operatorname{div} \mathbf{f} := \partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2} f_2 + \cdots + \partial_{x_d} f_d, \quad \nabla g := \begin{bmatrix} \partial_{x_1} g \\ \partial_{x_2} g \\ \vdots \\ \partial_{x_d} g \end{bmatrix}$$

können wir diese auch verkürzt schreiben als

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = f \quad \text{in } D, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial D. \quad (2.1)$$

Eine Lösung $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ wird *klassische Lösung* genannt. Wie wir sehen werden, gibt es aber auch physikalisch sinnvolle *schwache Lösungen*, die aus der Variationsformulierung gewonnen werden.

Satz 2.6 (Charakterisierungssatz) Sei V ein linearer Raum und

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

eine symmetrische, positive Bilinearform, das heißt, es sei $a(u, u) > 0$ für alle $u \in V \setminus \{0\}$. Ferner sei

$$\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$$

ein lineares Funktional. Die Größe

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$

nimmt in V ihr Minimum genau dann bei u an, wenn

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (2.2)$$

Außerdem gibt es höchstens eine Minimallösung.

Beweis. Für $u, v \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - \ell(u + tv) \\ &= J(u) + t\{a(u, v) - \ell(v)\} + \frac{1}{2}t^2a(v, v). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wenn $u \in V$ die Bedingung (2.2) erfüllt, dann folgt mit $t = 1$

$$J(u + v) = J(u) + a(v, v) > J(u), \quad \text{falls } v \neq 0 \text{ ist.}$$

Damit ist u also ein eindeutiger Minimalpunkt. Besitzt umgekehrt J bei u ein Minimum, dann muss für jedes $v \in V$ die Ableitung der Funktion $t \mapsto J(u + tv)$ bei $t = 0$ verschwinden. Nach (2.3) beträgt die Ableitung $a(u, v) - \ell(v)$, womit sich (2.2) ergibt. \square

Satz 2.7 Jede klassische Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.1) ist Lösung des Variationsproblems

$$J(v) = \int_D \left\{ \frac{\alpha}{2} \langle \nabla v, \nabla v \rangle - fv \right\} d\mathbf{x} \rightarrow \inf$$

unter allen Funktionen in $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ mit Nullrandwerten.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes:

$$\int_D \operatorname{div}((\alpha \nabla u)v) d\mathbf{x} = \int_D \{ \operatorname{div}(\alpha \nabla u)v + \alpha \langle \nabla u, \nabla v \rangle \} d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \langle \alpha \nabla u, \mathbf{n} \rangle v d\sigma.$$

Besitzt v homogene Randwerte, dann verschwindet der Randterm, und es ergibt sich

$$\int_D \alpha \langle \nabla v, \nabla v \rangle d\mathbf{x} = - \int_D \operatorname{div}(\alpha \nabla v)v d\mathbf{x}.$$

Wir setzen nun

$$a(u, v) := \int_D \alpha \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \ell(v) = \int_D f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

Dann gilt für jedes $v \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$

$$a(u, v) - \ell(v) = \int_D \{ \alpha \langle \nabla u, \nabla v \rangle - fv \} \, d\mathbf{x} = \int_D \{ -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) - f \} v \, d\mathbf{x},$$

und dieser Ausdruck wird 0 wenn $-\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = f$, also u eine klassische Lösung ist. Aus dem Charakterisierungssatz 2.6 folgt nun die Minimaleigenschaft. \square

Mit der selben Schlussweise erkennt man, dass jede Lösung des Variationsproblems, sofern sie im Raum $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ liegt, klassische Lösung von (2.1) ist.

Um die Existenz einer Lösung zu zeigen, darf man sich allerdings nicht auf klassische Lösungen beschränken, sondern muss auch schwache Lösungen zulassen.

Definition 2.8 Sei H ein Hilbert-Raum. Eine Bilinearform $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig**, wenn es ein $c_S > 0$ gibt, so dass

$$|a(u, v)| \leq c_S \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in H$$

ist. Eine symmetrische Bilinearform a heißt **H -elliptisch**, kurz **elliptisch** oder **koerziv**, wenn mit einem $c_E > 0$ gilt

$$a(v, v) \geq c_E \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in H.$$

Mit einer stetigen, H -elliptischen Bilinearform a wird durch

$$\|v\|_a := \sqrt{a(v, v)}$$

offensichtlich eine Norm induziert, die zur Norm des Hilbert-Raums H äquivalent ist. Diese Norm wird *Energienorm* genannt.

Wie üblich wird der Raum der stetigen, linearen Funktionale auf einem normierten Raum V mit V' bezeichnet.

Satz 2.9 (Lax-Milgram) Sei V ein abgeschlossener Unterraum in einem Hilbert-Raum H und $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und V -elliptische Bilinearform. Für jedes $\ell \in V'$ hat das Variationsproblem

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) \rightarrow \inf$$

genau eine Lösung in V .

Beweis. Wegen

$$J(v) \geq \frac{1}{2} c_E \|v\|^2 - \|\ell\| \|v\| = \frac{1}{2c_E} \underbrace{(c_E \|v\| - \|\ell\|)^2}_{\geq 0} - \frac{\|\ell\|^2}{2c_E} \geq -\frac{\|\ell\|^2}{2c_E}$$

ist J nach unten beschränkt. Setze $\underline{c} = \inf\{J(v) : v \in V\}$ und sei $\{v_n\}$ eine Minimalfolge. Dann ist

$$\begin{aligned} c_E \|v_n - v_m\|^2 &\leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) \\ &= 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\underbrace{\frac{v_n + v_m}{2}}_{\in V}\right) \\ &\leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8\underline{c}. \end{aligned}$$

Wegen $J(v_n), J(v_m) \rightarrow \underline{c}$ folgt $\|v_n - v_m\| \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Also ist $\{v_n\}$ eine Cauchy-Folge in H und es existiert $u = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Da V abgeschlossen ist, gilt auch $u \in V$. Die Stetigkeit von J impliziert schließlich

$$J(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \inf_{v \in V} J(v).$$

Die Lösung ist eindeutig, denn sind u_1 und u_2 zwei Lösungen, so ist $u_1, u_2, u_1, u_2, \dots$ offensichtlich eine Minimalfolge. Wie wir gesehen haben, ist jede Minimalfolge eine Cauchy-Folge, woraus sich $u_1 = u_2$ ergibt. \square

Bemerkung Im Spezialfall $V = H$ ergibt sich gerade der Rieszsche Darstellungssatz: Zu jedem $\ell \in H'$ gibt es ein Element $u \in H$ mit

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H.$$

\diamond

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Lösungsbegriff präzisieren.

Definition 2.10 Eine Funktion $u \in H_0^1(D)$ heißt **schwache Lösung** der partiellen Differentialgleichung (2.1), falls mit der zugehörigen Bilinearform

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(D)$$

ist.

Satz 2.11 Sei $\alpha \in L^\infty(D)$ mit $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} < \infty$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Dann hat (2.1) stets eine schwache Lösung in $H_0^1(D)$. Diese ist das Minimum des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v) \rightarrow \inf$$

in $H_0^1(D)$.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \int_D \alpha \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \bar{\alpha} \sum_{i=1}^d \int_D |\partial_{x_i} u \partial_{x_i} v| \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \bar{\alpha} \sum_{i=1}^d \sqrt{\int_D (\partial_{x_i} u)^2 \, d\mathbf{x}} \sqrt{\int_D (\partial_{x_i} v)^2 \, d\mathbf{x}} \\
 &\leq \bar{\alpha} d |u|_{H^1(D)} |v|_{H^1(D)}.
 \end{aligned}$$

ist die Bilinearform stetig auf $H^1(D)$. Die Elliptizität folgt aus

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &= \int_D \alpha \langle \nabla v, \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \\
 &\geq \underline{\alpha} \sum_{i=1}^d \int_D |\partial_{x_i} v|^2 \, d\mathbf{x} \\
 &\geq \underline{\alpha} |v|_{H^1(D)}^2.
 \end{aligned}$$

Wegen der Poincaré-Friedrichschen Ungleichung sind $|\cdot|_{H^1(D)}$ und $\|\cdot\|_{H^1(D)}$ äquivalente Normen und damit ist a eine $H_0^1(D)$ -elliptische Bilinearform. Gemäß dem Satz von Lax-Milgram 2.9 existiert eine eindeutige schwache Lösung, die zugleich das Variationsproblem löst. \square

2.3 Wahrscheinlichkeitsräume

Wir werden zunächst eine umgangssprachliche Definition des Wahrscheinlichkeitsraumes angeben. Am Ende des Kapitels wird dann eine mathematische Definition folgen.

Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) : Der Wahrscheinlichkeitsraum ist die Zusammenfassung aller Teile eines mathematischen Modells zur Beschreibung eines Zufallsexperiments. Verschiedene Zufallsexperimente führen auf verschiedene Wahrscheinlichkeitsräume.

Zufallsexperiment: Ein Zufallsexperiment ist gekennzeichnet durch zwei Eigenschaften:

- es ist beliebig oft wiederholbar (zumindest gedanklich),
- sein Ergebnis ist absolut nicht vorhersagbar.

Versuch: Ein Versuch ist eine Realisierung eines Zufallsexperiments, wobei wir mit

- ω das Ergebnis des Versuchs und
- Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse bezeichnen.

Annahme: Jedes Ergebnis eines Versuchs ist eindeutig einem Element ω der Ergebnismenge Ω zugeordnet.

Definition 2.12 Ein **zufälliges Ereignis** ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$. Wenn $\omega \in A$ gilt, so sagt man, dass das Ereignis A **eingetreten** ist. Nicht jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ muss sich als zufälliges Ereignis betrachten lassen, aber alle zufälligen Ereignisse sind Teilmengen von Ω .

Definition 2.13 Die Menge Σ von Teilmengen der Ergebnismenge Ω , welche die zufälligen Ereignisse beschreiben, heißt **σ -Algebra**, wenn gilt:

1. $\Omega \in \Sigma$,
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$,
3. $A_i \in \Sigma \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Das Paar (Ω, Σ) heißt dann **Ereignisraum** oder **messbarer Raum**.

Bemerkung Wie man leicht zeigt, gelten für eine σ -Algebra Σ zusätzlich die Aussagen

1. $\emptyset \in \Sigma$,
2. $A_i \in \Sigma \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$,
3. $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$.

Zusammen mit den Eigenschaften 1–3 aus Definition 2.13 ist daher sichergestellt, dass jedes mögliche Ergebnis von endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen Mengenoperationen wieder in der σ -Algebra liegt. \diamond

Lemma 2.14 (Erzeugung von σ -Algebren) Ist $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem, so gibt es genau eine kleinste σ -Algebra $\Sigma = \sigma(\mathcal{S})$ mit $\Sigma \supset \mathcal{S}$. Dieses Σ heißt die von \mathcal{S} erzeugte σ -Algebra.

Beweis. Sei \mathcal{A} das System aller σ -Algebren Ξ mit $\Xi \supset \mathcal{S}$. \mathcal{A} ist nichtleer, denn es gilt $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathcal{A}$. Also können wir setzen $\Sigma = \bigcap_{\Xi \in \mathcal{A}} \Xi$. Offensichtlich ist Σ eine σ -Algebra, die \mathcal{S} enthält. Insbesondere ist sie in \mathcal{A} enthalten und dessen kleinstes Element. Dies war zu zeigen. \square

Beispiel 2.15 (Borelsche σ -Algebra) Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigotimes_{i=1}^n [a_i, b_i] : a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

das System aller achsenparallelen kompakten Quader im \mathbb{R}^n mit rationalen Eckpunkten. Dann heißt $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{S})$ die **Borelsche σ -Algebra** auf \mathbb{R}^n und jedes $A \in \mathcal{B}^n$ eine Borelmenge. Es gilt

- (a) Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Borelsch. Denn jedes $\omega \in A$ besitzt eine Umgebung $Q \in \mathcal{S}$ mit $Q \subset A$, es ist also $A = \bigcup_{Q \in \mathcal{S}, Q \subset A} Q$. Dies ist eine Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in \mathcal{B}^n und damit in \mathcal{B}^n enthalten.

- (b) Jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Borelsch, denn A^c ist ja offen und damit Borelsch.
- (c) Die Borelsche σ -Algebra \mathcal{B}^n lässt sich leider nicht konstruktiv beschreiben. Es genügt zu wissen, dass \mathcal{B}^n praktisch alle vorkommenden Mengen im \mathbb{R}^n enthält.
- (d) Für $n = 1$ wird $\mathcal{B} := \mathcal{B}^1$ auf \mathbb{R} außer vom System \mathcal{S} der kompakten Intervalle auch erzeugt durch

$$\mathcal{S}' = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$$

aller abgeschlossenen, linksseitig unbeschränkten Intervalle. Denn wegen (b) gilt $\mathcal{S}' \in \mathcal{B}$ und daher auch $\sigma(\mathcal{S}') \subset \mathcal{B}$, aufgrund der Minimalität von $\sigma(\mathcal{S}')$. Umgekehrt enthält $\sigma(\mathcal{S}')$ alle halboffenen Intervalle $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$ und folglich alle kompakten Intervalle

$$[a, b] = \bigcap_{m \geq 1} (a - 1/m, b],$$

speziell auch die von ihnen erzeugte σ -Algebra \mathcal{B} .

- (e) Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist das System $\mathcal{B}_\Omega^n = \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{B}^n\}$ eine σ -Algebra auf Ω . Sie heißt die *Borelsche σ -Algebra auf Ω* .

△

Nun können wir den Wahrscheinlichkeitsbegriff einführen. Intuitiv klar sind folgende Forderungen.

Kolmogorovsches Axiomsystem (1933): Gegeben sei ein messbarer Raum (Ω, Σ) , welcher ein Zufallsexperiment beschreibt. Dann ist jedem zufälligem Ereignis $A \in \Sigma$ eine reelle Zahl $P(A)$ zugeordnet, die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A . Dabei gelten die folgenden Axiome:

- A1. *Positivität:* $0 \leq P(A)$ für alle $A \in \Sigma$.
- A2. *Normierung:* $P(\Omega) = 1$.
- A3. *σ -Additivität:* Für eine Folge von Ereignissen $A_i \in \Sigma$, welche paarweise unvereinbar sind, das heißt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, ist

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definition 2.16 Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Eine Funktion $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, die die Axiome A1–A3 erfüllt, wird **Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt. Das Tripel (Ω, Σ, P) heißt **Wahrscheinlichkeitsraum** des gegebenen Zufallsexperiments.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Borelsch, so wird oftmals das Wahrscheinlichkeitsmaß durch eine Lebesgue-integrierbare *Dichtefunktion* $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ erzeugt, das heißt, es gilt

$$P(A) = \int_A dP(\omega) = \int_A \rho(\xi) d\xi \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}_\Omega^n.$$

Dabei muss die Dichtefunktion die Normierungsbedingung

$$P(\Omega) = \int_{\Omega} dP(\omega) = \int_{\Omega} \rho(\xi) d\xi = 1$$

erfüllen.

Beispiel 2.17

1. Ist $\Omega = (a, b)$ und $\Sigma = \mathcal{B}_\Omega$, dann ist die *Gleichverteilung* gegeben durch die Dichte

$$\rho(\xi) = \frac{1}{b-a}, \quad a < \xi < b.$$

2. Ist $\Omega = (-\infty, \infty)$ und $\Sigma = \mathcal{B}_\Omega$, dann beschreibt die Dichte

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < \xi < \infty,$$

die *Normalverteilung* mit den Parametern μ und $\sigma^2 > 0$, auch kurz die $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung.

△

Zusammenfassung: Ein Zufallsexperiment wird durch folgende drei Komponenten des mathematischen Modells vollständig charakterisiert:

- *Ergebnismenge* Ω : nichtleere Menge, deren Elemente die möglichen Versuchsausgänge darstellen
- σ -*Algebra* Σ : Menge der Teilmengen von Ω , die zufällige Ereignisse bilden und für die die Eigenschaften 1–3 aus Definition 2.13 gelten
- *Wahrscheinlichkeitsmaß* P : jedem Ereignis $A \in \Sigma$ ist in eindeutiger Weise eine Zahl $P(A)$ zugeordnet, die Wahrscheinlichkeit genannt wird

2.4 Zufallsgrößen

Vielfach sind die Ergebnisse von zufälligen Versuchen von Natur aus Zahlenwerte. Häufig möchte man aber auch in Fällen, wo dies nicht der Fall ist, Zahlenwerte zur Charakterisierung der Ergebnisse von Zufallsexperimenten verwenden. Dies geschieht mit Hilfe von *Zufallsgrößen* X , wobei jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reellen Zahl oder Vektor $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$ als Wert der Zufallsgröße zugeordnet wird.

Definition 2.18 Sind (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) messbare Räume, dann nennen wir die Abbildung $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ **messbar**, wenn

$$f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in A\} \in \Sigma_1 \quad \text{für alle } A \in \Sigma_2$$

gilt. Man sagt kurz, dass f (Σ_1, Σ_2) -messbar ist. Eine messbare Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwischen einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) und dem messbaren Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ heißt **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable** über (Ω, Σ, P) .

Der Begriff Zufallsvariable ist, obwohl er häufig benutzt wird, etwas irreführend, denn strenggenommen ist eine Zufallsgröße eine *Abbildung*.

Beispiel 2.19 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\Sigma = \mathcal{B}_\Omega^n$. Dann ist jede stetige Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße. Denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq c\}$ abgeschlossen in Ω und gehört damit gemäß Beispiel 2.15 (b) und (e) zu \mathcal{B}_Ω^n . \triangle

Zu einem messbaren Raum (Ω, Σ, P) existiert die Theorie der Lebesgue-Integration. Eine Zufallsgröße $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrabel*, wenn ihr Positiv- und Negativteil jeweils ein endliches Integral besitzen. Bezeichnet $L_P^p(\Omega)$ für beliebiges $p \geq 1$ den Banach-Raum aller Funktionen mit endlicher $L_P^p(\Omega)$ -Norm, wobei

$$\|f\|_{L_P^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

und

$$\|f\|_{L_P^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|,$$

so sind gerade die Funktionen aus $L_P^1(\Omega)$ integrabel.

Definition 2.20 Sei $f \in L_P^p(\Omega)$, dann heißt die Größe

$$\mathcal{M}_f^p = \int_{\Omega} f^p(\omega) dP(\omega)$$

das **p -te Moment** und

$$\overline{\mathcal{M}}_f^p = \int_{\Omega} (f(\omega) - \mathcal{M}_f^1)^p dP(\omega)$$

das **p -te zentrierte Moment** von f . Speziell heißt das erste Moment

$$\mathbb{E}_f = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega)$$

der **Erwartungswert** oder **Mittelwert** von f und das zweite zentrierte Moment

$$\mathbb{V}_f = \mathbb{E}((f - \mathbb{E}_f)^2) = \int_{\Omega} (f(\omega) - \mathbb{E}_f)^2 dP(\omega)$$

die **Varianz**.

Bemerkung Es gilt

$$\mathbb{E}((f - \mathbb{E}_f)^2) = \mathbb{E}(f^2) - 2\mathbb{E}_f^2 + \mathbb{E}_f^2 = \mathbb{E}(f^2) - \mathbb{E}_f^2,$$

also

$$\mathbb{V}_f = \|f\|_{L_P^2(\Omega)}^2 - \mathbb{E}_f^2.$$

\diamond

Eine für die Anwendungen sehr wichtige, aber leider oftmals recht unscharfe Abschätzung liefert die Tschebyscheffsche Ungleichung:

Satz 2.21 Es gilt die Tschebyscheffsche Ungleichung

$$P(|f(\omega) - \mathbb{E}_f| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}_f}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Umstellen von

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \int_{\Omega} (f(\omega) - \mathbb{E}_f)^2 dP(\omega) \\ &\geq \int_{|f(\omega) - \mathbb{E}_f| \geq \varepsilon} \underbrace{(f(\omega) - \mathbb{E}_f)^2}_{\geq \varepsilon^2} dP(\omega) \\ &\geq \varepsilon^2 \int_{|f(\omega) - \mathbb{E}_f| \geq \varepsilon} dP(\omega) \\ &= \varepsilon^2 P(|f(\omega) - \mathbb{E}_f| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

□

Definition 2.22 Sind zwei reellwertige Funktionen $f, g \in L_P^2(\Omega)$ gegeben, so ist ihre **Korrelation** definiert durch

$$\text{Cor}(f, g) := \mathbb{E}(f \cdot g) = \int_{\Omega} f(\omega)g(\omega) dP(\omega)$$

und ihre **Kovarianz** durch

$$\text{Cov}(f, g) := \int_{\Omega} (f(\omega) - \mathbb{E}_f)(g(\omega) - \mathbb{E}_g) dP(\omega) = \text{Cor}(f, g) - \mathbb{E}_f \mathbb{E}_g.$$

Gilt $\text{Cor}(f, g) = 0$, so sind die Funktionen f und g **unkorreliert**.

Bemerkung

1. Beide Größen existieren, denn es ist $|f \cdot g| \leq |f|^2 + |g|^2$ auf Ω .
2. Zwei Funktionen f und g sind genau dann unkorreliert, wenn sie orthogonal bezüglich des $L_P^2(\Omega)$ -Innenprodukts sind.

◇

3. Stochastische partielle Differentialgleichungen

3.1 Variationsformulierung stochastischer PDEs

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\Sigma = \mathcal{B}_\Omega^n$. Der Tensorproduktraum $L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ besteht aus allen Funktionen $u(\mathbf{x}, \omega)$, die quadratisch integrierbar sind, das heißt

$$\|u\|_{L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)} := \sqrt{\int_\Omega \int_D u^2(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega)} < \infty.$$

Darin enthalten sind die Tensorprodukträume $H^m(D) \otimes L_P^2(\Omega)$, $m \geq 0$, ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{H^m(D) \otimes L_P^2(\Omega)} := \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha u\|_{L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)}^2}.$$

Der Raum $H_0^m(D) \otimes L_P^2(\Omega)$, $m \geq 0$, ist entsprechend definiert. Für seinen Dualraum gilt

$$(H_0^{-m}(D) \otimes L_P^2(\Omega))' = H^{-m}(D) \otimes L_P^2(\Omega).$$

Weiterhin bezeichnen wir mit $L^\infty(D \times \Omega)$ den Raum der auf $D \times \Omega$ beschränkten Funktionen.

Bemerkung Es sei $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis in $H^m(D)$ und $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine von $L_P^2(\Omega)$. Dann ist $\{\phi_i \otimes \psi_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des Tensorproduktraums $H^m(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ und alle seine Funktionen besitzen eine eindeutige Darstellung

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} u_{i,j} \phi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\omega), \quad u_{i,j} \in \ell^2(\mathbb{N}^2).$$

◇

Wir betrachten nun das stochastische Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\alpha(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} u(\omega)) &= f(\omega) && \text{in } D \\ u(\omega) &= 0 && \text{auf } \partial D \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega. \quad (3.1)$$

Partielle Integration gegen eine Funktion $v \in H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ führt auf

$$-\int_\Omega \int_D \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\alpha(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} u(\omega)) v(\omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) = \int_\Omega \int_D \alpha(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} u(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} v(\omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega).$$

Definieren wir die Bilinearform

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \int_D \alpha(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} u(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} v(\omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) = \mathbb{E} \left(\int_D \alpha(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} u(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} v(\omega) \, d\mathbf{x} \right)$$

und die Linearform

$$\ell(v) = \int_{\Omega} \int_D f(\omega) v(\omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) = \mathbb{E} \left(\int_D f(\omega) v(\omega) \, d\mathbf{x} \right),$$

so suchen wir offensichtlich eine Funktion $u \in H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)$, so dass

$$b(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega). \quad (3.2)$$

Satz 3.1 Sei $\alpha \in L^\infty(D \times \Omega)$ mit $0 < \underline{\alpha} < \alpha(\mathbf{x}, \omega) < \bar{\alpha} < \infty$ für alle $(\mathbf{x}, \omega) \in D \times \Omega$. Dann existiert für jedes $f \in H^{-1}(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ mit (3.2).

Beweis. Die Bilinearform

$$b : (H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)) \times (H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &\leq \bar{\alpha} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \int_D |\partial_{x_i} u(\omega)| |\partial_{x_i} v(\omega)| \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) \\ &\leq \bar{\alpha} \sum_{i=1}^d \sqrt{\int_{\Omega} \int_D |\partial_{x_i} u(\omega)|^2 \, d\mathbf{x} \, dP(\omega)} \sqrt{\int_{\Omega} \int_D |\partial_{x_i} v(\omega)|^2 \, d\mathbf{x} \, dP(\omega)} \\ &\leq \bar{\alpha} d \|u\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aus

$$b(v, v) \geq \underline{\alpha} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \int_D |\partial_{x_i} v(\omega)|^2 \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) = \underline{\alpha} |v|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)}^2.$$

und der Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung folgt ihre $H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ -Elliptizität:

$$|b(v, v)| \geq c_E \|v\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega).$$

Der Satz von Lax-Milgram 2.9 liefert schließlich die Behauptung. \square

Von der (schwachen) Lösung $u \in H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ zu (3.1) interessieren uns vor allem statistische Kenngrößen wie Erwartungswert und Varianz. Beide sind endlich, da für jedes \mathbf{x} die Funktion $u(\mathbf{x}) \in L_P^2(\Omega)$ ist. Speziell ist

$$\mathbb{E}_u = \int_{\Omega} u(\cdot, \omega) \, dP(\omega) \in H_0^1(D)$$

und

$$\mathbb{V}_u = \int_{\Omega} u^2(\cdot, \omega) \, dP(\omega) - \mathbb{E}_u^2(\mathbf{x}) \in L^1(D).$$

3.2 Stochastische Lastvektoren

Wir wollen den Spezialfall betrachten, dass der Diffusionskoeffizient deterministisch ist, also $\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \alpha(\mathbf{x})$ gilt. Wir betrachten demnach das stochastische Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\alpha \nabla_{\mathbf{x}} u(\omega)) &= f(\omega) && \text{in } D \\ u(\omega) &= 0 && \text{auf } \partial D \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega \quad (3.3)$$

mit $f \in H^{-1}(D) \otimes L^2_P(\Omega)$.

Satz 3.2 Der Erwartungswert der Lösung $u \in H_0^1(D) \otimes L^2_P(\Omega)$ von (3.3) erfüllt das deterministische Randwertproblem

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \mathbb{E}_u) = \mathbb{E}_f \text{ in } D, \quad \mathbb{E}_u = 0 \text{ auf } \partial D. \quad (3.4)$$

Beweis. Es sei $u \in H_0^1(D) \otimes L^2_P(\Omega)$ von (3.4). Die Behauptung ergibt sich durch Vertauschung von Differentiation und Integration gemäß

$$\begin{aligned} \left(-\operatorname{div}(\alpha \nabla \mathbb{E}_u) \right)(\mathbf{x}) &= -\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\alpha(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, \omega) \, dP(\omega) \right) \\ &= -\int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\alpha(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \omega)) \, dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) \, dP(\omega) \\ &= \mathbb{E}_f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Dabei ist der Differentialoperator im schwachen Sinne zu verstehen. \square

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\mathbb{E}_u \in H_0^1(D)$ von der partiellen Differentialgleichung (3.4) folgt unmittelbar aus Abschnitt 2.2, da $\mathbb{E}_f \in H^{-1}(D)$ gilt.

Bemerkung Im Falle eines Randwertproblems mit stochastischem Diffusionskoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\alpha(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} u(\omega)) &= f && \text{in } D \\ u(\omega) &= 0 && \text{auf } \partial D \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega$$

hängt die Lösung *nichtlinear* vom stochastischen Koeffizienten ab. Daher gilt *nicht* einfach die Gleichung

$$-\operatorname{div}(\mathbb{E}_\alpha \nabla \mathbb{E}_u) = f \text{ in } D, \quad \mathbb{E}_u = 0 \text{ auf } \partial D.$$

\diamond

Das Berechnen der Varianz ist ein nichtlineares Problem, denn man muss das Integral

$$\mathbb{E}(u^2(\omega)) = \int_{\Omega} u^2(\omega) \, dP(\omega)$$

mit dem nichtlinearen Argument u^2 auswerten. Jedoch kann man diese auch über die *Zwei-Punkt-Korrelation* berechnen

$$\text{Cor}_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{E}(u(\mathbf{x}, \omega) \cdot u(\mathbf{y}, \omega)) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, \omega)u(\mathbf{y}, \omega) dP(\omega),$$

denn es gilt dann

$$\mathbb{V}_u(\mathbf{x}) = \text{Cor}_u(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} - \mathbb{E}_u^2(\mathbf{x}).$$

Satz 3.3 Die Zwei-Punkt-Korrelation der Lösung $u \in H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ von (3.3) erfüllt das deterministische Randwertproblem

$$\begin{aligned} (\text{div}_{\mathbf{x}} \otimes \text{div}_{\mathbf{y}})((\alpha \otimes \alpha)(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}})\text{Cor}_u) &= \text{Cor}_f \quad \text{in } D \times D, \\ \text{Cor}_u &= 0 \quad \text{auf } \partial(D \times D). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} & \left((\text{div}_{\mathbf{x}} \otimes \text{div}_{\mathbf{y}})((\alpha \otimes \alpha)(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}})\text{Cor}_u) \right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= (\text{div}_{\mathbf{x}} \otimes \text{div}_{\mathbf{y}}) \left((\alpha \otimes \alpha)(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}}) \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, \omega)u(\mathbf{y}, \omega) dP(\omega) \right) \\ &= \int_{\Omega} \text{div}_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{y}} \left(\alpha(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}(u(\mathbf{x}, \omega)u(\mathbf{y}, \omega)) \right) dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(-\text{div}_{\mathbf{x}}(\alpha(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, \omega)) \right) \left(-\text{div}_{\mathbf{y}}(\alpha(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}u(\mathbf{y}, \omega)) \right) dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega)f(\mathbf{y}, \omega) dP(\omega) \\ &= \text{Cor}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun die Frage beantworten, was der richtige Energieraum für das Randwertproblem (3.5) ist. Dazu benötigen wir für $m > 0$ den Tensorproduktraum $H_{\text{mix}}^m(D \times D) := H^m(D) \otimes H^m(D)$, der alle Funktionen enthält mit beschränkten gemischten Ableitungen

$$\|u\|_{H_{\text{mix}}^m(D \times D)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \|\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_{\mathbf{y}}^{\beta} u\|_{L^2(D \times D)}^2} < \infty.$$

Die zugehörige Seminorm ist definiert durch

$$|u|_{H_{\text{mix}}^m(D \times D)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|, |\beta| = m} \|\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_{\mathbf{y}}^{\beta} u\|_{L^2(D \times D)}^2}.$$

Bemerkung Beachte, dass die Funktionen im Raum $H_{\text{mix}}^m(D \times D)$ mehr Glattheit besitzen als die Funktionen im Raum $H^m(D \times D)$. Speziell gelten für $m \geq 1$ die Inklusionen

$$H^m(D \times D) \supsetneq H_{\text{mix}}^m(D \times D) \supsetneq H^{2m}(D \times D)$$

◇

Die Funktionen des Unterraums $H_{0,\text{mix}}^m(D \times D) := H_0^m(D) \otimes H_0^m(D) \subset H_{\text{mix}}^m(D \times D)$ sind Null auf der Menge

$$(D \times \partial D) \cup (\partial D \times D) \cup (\partial D \times \partial D) = \partial(D \times D).$$

Der Dualraum des $H_{\text{mix}}^m(D \times D)$ ist der Raum

$$(H_{0,\text{mix}}^m(D \times D))' = H_0^m(D)' \otimes H_0^m(D)' = H^{-m}(D) \otimes H^{-m}(D) =: H_{\text{mix}}^{-m}(D \times D).$$

Im Unterschied zum $H_0^m(D \times D)$ erfüllen auch die m -ten Ableitungen von Funktionen aus $H_{0,\text{mix}}^m(D \times D)$ Nullrandbedingungen, da ja beispielsweise $\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u(\mathbf{x}, \cdot) \in H_0^m(D)$ gilt für alle $|\alpha| \leq m$. Daher impliziert die Poincaré-Friedrichsche Ungleichung die Normäquivalenz

$$|v|_{H_{\text{mix}}^m(D \times D)} \leq \|v\|_{H_{\text{mix}}^m(D \times D)} \leq (1+s)^{2m} |v|_{H_{\text{mix}}^m(D \times D)} \quad \text{für } v \in H_{0,\text{mix}}^m(D \times D), \quad (3.6)$$

falls D in einem Würfel der Kantenlänge s enthalten ist.

Wir testen nun den Differentialoperator in (3.5) mit einer Funktion $v \in H_{0,\text{mix}}^1(D \times D)$. Zweimaliges partielles integrieren führt auf

$$\begin{aligned} & \int_{D \times D} (\text{div}_{\mathbf{x}} \otimes \text{div}_{\mathbf{y}})((\alpha \otimes \alpha)(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}})u)v \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_D \int_D \text{div}_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{y}} (\alpha(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}u(\mathbf{x}, \mathbf{y}))v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_D \int_D \text{div}_{\mathbf{y}} (\alpha(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}u(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\nabla_{\mathbf{x}}v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_D \int_D \alpha(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}u(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{D \times D} (\alpha \otimes \alpha)(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}})u(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}})v \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &=: a(u, v). \end{aligned}$$

Die Bilinearform $a : H_{0,\text{mix}}^1(D \times D) \times H_{0,\text{mix}}^1(D \times D) \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt offensichtlich

$$a(u, v) \leq \bar{\alpha}^2 d^2 \|u\|_{H_{\text{mix}}^1(D \times D)} \|v\|_{H_{\text{mix}}^1(D \times D)}$$

und

$$a(v, v) \geq \underline{\alpha}^2 |v|_{H_{\text{mix}}^1(D \times D)}^2 \stackrel{(3.6)}{\geq} c_E \|v\|_{H_{\text{mix}}^1(D \times D)}^2.$$

Setzen wir noch

$$\ell(v) := \int_{D \times D} \text{Cor}_f v \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dann haben wir gerade den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.4 Sei $\alpha \in L^\infty(D)$ mit $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} < \infty$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Dann existiert für jedes $\text{Cor}_f \in H_{\text{mix}}^{-1}(D \times D)$ genau eine Lösung $\text{Cor}_u \in H_{0,\text{mix}}^1(D \times D)$ mit

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H_{0,\text{mix}}^1(D \times D).$$

Bemerkung Für einen separablen Hilbert-Raum H sei der Banach-Raum $L_P^k(\Omega, H)$ definiert durch

$$L_P^k(\Omega, H) := \left\{ f : \Omega \rightarrow H \mid f \text{ messbar und } \int_{\Omega} \|f(\omega)\|_H^k dP(\omega) < \infty \right\}.$$

Ferner bezeichne \mathcal{L} einen deterministischen, elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung. Dann kann man allgemein zeigen, dass das k -te Moment der Lösung $u \in L_P^k(\Omega, H_0^1(D))$ zur Differentialgleichung

$$\mathcal{L}u(\omega) = f(\omega) \text{ in } D, \quad u(\omega) = 0 \text{ auf } \partial D$$

existiert, falls $f \in L_P^k(\Omega, H_0^{-1}(D))$. Das k -te Moment $\mathcal{M}_u^k \in H_{0,\text{mix}}^1(D^k)$ genügt dann folgendem deterministischen Tensorproduktproblem:

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L})}_{k\text{-mal}} \mathcal{M}_u^k &= \mathcal{M}_f^k \quad \text{in } \underbrace{D \times D \times D \times \cdots \times D}_{k\text{-mal}}, \\ \mathcal{M}_u^k &= 0 \quad \text{auf } \partial(D \times D \times D \times \cdots \times D). \end{aligned}$$

◇

3.3 Stochastische Diffusionskoeffizienten

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass nur der Diffusionskoeffizient stochastisch ist und der Lastvektor deterministisch:

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\alpha(\omega)\nabla_{\mathbf{x}}u(\omega)) &= f \quad \text{in } D \\ u(\omega) &= 0 \quad \text{auf } \partial D \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega. \quad (3.7)$$

Wir wollen im folgenden eine Sensitivitätsanalyse bezüglich des Diffusionskoeffizienten α durchführen. Dazu berechnen wir die Ableitung der Lösung $u = u(\alpha) \in H_0^1(D)$ bezüglich des Diffusionskoeffizienten $\alpha \in L^\infty(D)$.

Lemma 3.5 Sei $\alpha \in L^\infty(D)$ mit $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} < \infty$. Ferner bezeichne $u \in H_0^1(D)$ die Lösung von

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla u) = f \text{ in } D, \quad u = 0 \text{ auf } \partial D.$$

Dann ist die Abbildung

$$F : L^\infty(D) \rightarrow H_0^1(D), \quad \alpha \mapsto F(\alpha) := u$$

lokal Fréchet-differenzierbar, wobei die Ableitung $\delta u[\beta] \in H_0^1(D)$ in die Richtung $\beta \in L^\infty(D)$ charakterisiert wird durch die Randwertaufgabe

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\delta u[\beta]) = \operatorname{div}(\beta\nabla u) \text{ in } D, \quad \delta u[\beta] = 0 \text{ auf } \partial D. \quad (3.8)$$

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in L^\infty(D)$ mit $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} < \infty$ und $\|\beta\|_{L^\infty(D)} = 1$. Für alle $\varepsilon \leq \underline{\alpha}/2$ gilt dann

$$0 < \frac{\underline{\alpha}}{2} \leq \alpha(\mathbf{x}) + \varepsilon\beta(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} + \frac{\underline{\alpha}}{2} < \infty \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D. \quad (3.9)$$

Wir betrachten nun die Lösungen $u, u_\varepsilon \in H_0^1(D)$ der Randwertprobleme

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) &= f \text{ in } D, \quad u = 0 \text{ auf } \partial D, \\ -\operatorname{div}((\alpha + \varepsilon \beta) \nabla u_\varepsilon) &= f \text{ in } D, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ auf } \partial D. \end{aligned}$$

Ziehen wir beide Gleichungen voneinander ab, so impliziert die schwache Formulierung die Identität

$$0 = \int_D \alpha \langle \nabla(u_\varepsilon - u), \nabla v \rangle + \varepsilon \beta \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(D).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} c_E \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(D)} &\leq \sup_{v \in H_0^1(D), \|v\|_{H^1(D)}=1} \int_D \alpha \langle \nabla(u_\varepsilon - u), \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \\ &= \varepsilon \sup_{v \in H_0^1(D), \|v\|_{H^1(D)}=1} \int_D \beta \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \\ &\leq \varepsilon d \|\beta\|_{L^\infty(D)} \sup_{v \in H_0^1(D), \|v\|_{H^1(D)}=1} |u_\varepsilon|_{H^1(D)} |v|_{H^1(D)} \\ &\leq c \varepsilon \underbrace{\|\beta\|_{L^\infty(D)}}_{=1} \underbrace{|u_\varepsilon|_{H^1(D)}}_{\leq c \|f\|_{H^{-1}(D)}} \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei die obere Schranke wegen (3.9) unabhängig von β ist. Damit folgt schließlich die Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung $\alpha \mapsto F(\alpha) = u$ gemäß

$$\begin{aligned} c_E \|u_\varepsilon - u - \varepsilon \delta u[\beta]\|_{H^1(D)} &\leq \sup_{v \in H_0^1(D), \|v\|_{H^1(D)}=1} \int_D \alpha \langle \nabla(u_\varepsilon - u - \varepsilon \delta u[\beta]), \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \\ &= \sup_{v \in H_0^1(D), \|v\|_{H^1(D)}=1} \left\{ \int_D \underbrace{\langle (\alpha + \varepsilon \beta) \nabla u_\varepsilon - \alpha \nabla u, \nabla v \rangle}_{=0} \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \int_D \langle \beta \nabla u_\varepsilon + \alpha \nabla \delta u[\beta], \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \right\} \\ &\stackrel{(3.8)}{=} \varepsilon \sup_{v \in H_0^1(D), \|v\|_{H^1(D)}=1} \int_D \beta \langle \nabla(u_\varepsilon - u), \nabla v \rangle \, d\mathbf{x} \\ &\leq c \varepsilon \|\beta\|_{L^\infty(D)} \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(D)} \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

□

Bemerkung Wie man unschwer aus (3.8) erkennt, besitzt die Fréchet-Ableitung δu die gleiche Regularität wie u . Dies impliziert, dass auch δu wieder Fréchet-differenzierbar ist. Man kann sogar zeigen, dass die Abbildung $\alpha \mapsto F(\alpha) = u$ analytisch ist. ◇

Mithilfe von Lemma 3.5 erhalten wir eine Taylor-Entwicklung erster Ordnung

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon \delta u[\beta] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.10)$$

Dabei ist der Fehlerterm der Taylor-Entwicklung im Sinne des $H^1(D)$ zu verstehen, das heißt, es gilt

$$\|u + \varepsilon \delta u[\beta] - u_\varepsilon\|_{H^1(D)} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Die Taylor-Entwicklung (3.10) kann man nun dazu verwenden, das Randwertproblem (3.7) mit stochastischem Diffusionskoeffizienten näherungsweise in ein Randwertproblem mit stochastischer rechter Seite überzuführen.

Lemma 3.6 Der stochastische Koeffizient aus (3.7) besitze die Form

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \alpha_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \beta(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{mit} \quad \underline{\alpha} \leq \alpha_0(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} \text{ in } D \quad \text{und} \quad \|\beta\|_{L^\infty(D \times \Omega)} = 1 \quad (3.11)$$

und $\varepsilon > 0$ sei klein genug. Dann genügt $u_\varepsilon(\omega)$ bezüglich des Raums $H_0^1(D)$ folgender stochastischer Taylor-Entwicklung erster Ordnung

$$u_\varepsilon(\omega) = u_0 + \varepsilon \delta u[\beta(\omega)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega, \quad (3.12)$$

wobei $u_0, \delta u(\omega) \in H_0^1(D)$ den Charakterisierungsgleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\alpha_0 \nabla u_0) &= f & \text{in } D, & & u_0 &= 0 & \text{auf } \partial D, \\ -\operatorname{div}(\alpha_0 \nabla \delta u(\omega)) &= \operatorname{div}(\beta(\omega) \nabla u_0) & \text{in } D, & & \delta u(\omega) &= 0 & \text{auf } \partial D, \end{aligned} \quad (3.13)$$

genügen.

Beweis. Unter den Voraussetzungen (3.11) führt das Anwenden der Taylor-Entwicklung (3.10) für eine beliebige fixierte Realisierung $\alpha(\cdot, \omega)$, $\omega \in \Omega$, auf das stochastische Gegenstück (3.12). \square

Mithilfe der stochastischen Taylor-Entwicklung können wir nun eine stochastische Störungsanalyse betreiben. Zunächst gilt für den Erwartung der

Satz 3.7 Der stochastische Koeffizient aus (3.7) besitze die Form (3.11) mit

$$\mathbb{E}\beta = 0 \quad \text{in } D.$$

Dann ist der Erwartungswert $\mathbb{E}u_\varepsilon \in H_0^1(D)$ mit zweiter Ordnung in ε gegeben durch die Funktion $u_0 \in H_0^1(D)$ aus (3.13), das heißt, es gilt die Abschätzung

$$\|\mathbb{E}u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(D)} = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.14)$$

Beweis. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ können wir die Taylor-Entwicklung (3.12) anwenden und erhalten

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \delta u(\mathbf{x}, \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \omega \in \Omega,$$

Daraus schließen wir

$$\mathbb{E}(u_\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)) = \mathbb{E}(u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \delta u(\mathbf{x}, \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbb{E}(\delta u(\mathbf{x}, \omega)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Aus der Charakterisierungsgleichung (3.13) für $\delta u(\omega) \in H_0^1(D)$ folgt nun gemäß Satz 3.2 die Gleichung

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \mathbb{E}_{\delta u}) = \mathbb{E}\left(\operatorname{div}(\beta(\omega) \nabla u_0)\right) = \operatorname{div}\left(\underbrace{\mathbb{E}_{\beta}}_{=0} \nabla u_0\right) = 0.$$

Dies bedeutet, $\mathbb{E}(\delta u(\omega)) = \mathbb{E}_{\delta u} = 0$ und folglich

$$\mathbb{E}(u_\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)) = u_0(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

im Sinne des $H_0^1(D)$. □

Satz 3.8 Unter den Voraussetzungen von Satz 3.7 ist die Zwei-Punkt-Kovarianz $\operatorname{Cov}_u \in H_{0,\text{mix}}^1(D \times D)$ der Lösung von (3.7) mit dritter Ordnung in ε durch $\varepsilon^2 \operatorname{Cor}_{\delta u}$ gegeben. Mit anderen Worten, es gilt

$$\|\operatorname{Cov}_u - \varepsilon^2 \operatorname{Cor}_{\delta u}\|_{H_{0,\text{mix}}^1(D \times D)} = \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.15)$$

wobei $\operatorname{Cor}_{\delta u} \in H_{0,\text{mix}}^1(D)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} & (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \otimes \operatorname{div}_{\mathbf{y}})((\alpha_0 \otimes \alpha_0)(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{y}})\operatorname{Cor}_{\delta u}) \\ &= (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \otimes \operatorname{div}_{\mathbf{y}})(\operatorname{Cor}_{\beta}(\nabla_{\mathbf{x}} u_0 \otimes \nabla_{\mathbf{y}} u_0)) \quad \text{in } D \times D \\ & \operatorname{Cor}_{\delta u} = 0 \quad \text{auf } \partial(D \times D). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Beweis. Unter den vorliegenden Voraussetzungen gilt die stochastische Taylor-Entwicklung (3.12), mit deren Hilfe wir beide Terme der rechten Seite von

$$\operatorname{Cov}_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{E}([u_\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) - \mathbb{E}_u(\mathbf{x})] \cdot [u_\varepsilon(\mathbf{y}, \omega) - \mathbb{E}_u(\mathbf{y})])$$

entwickeln. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbb{E}([u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \delta u(\mathbf{x}, \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - \mathbb{E}_u(\mathbf{x})] \\ & \quad \cdot [u_0(\mathbf{y}) + \varepsilon \delta u(\mathbf{y}, \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - \mathbb{E}_u(\mathbf{y})]) \\ &= \mathbb{E}([\varepsilon \delta u(\mathbf{x}, \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \cdot [\varepsilon \delta u(\mathbf{y}, \omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)]) \\ &= \varepsilon^2 \mathbb{E}(\delta u(\mathbf{x}, \omega) \cdot \delta u(\mathbf{y}, \omega)) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon^2 \operatorname{Cor}_{\delta u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Da δu das Randwertproblem (3.13) löst, schließen wir aus Satz 3.3, dass $\operatorname{Cor}_{\delta u} \in H_{0,\text{mix}}^1(D \times D)$ gegeben ist durch (3.16). □

Bemerkungen

1. Aus der Kovarianz kann natürlich durch Spurbildung auf die Varianz geschlossen werden:

$$\mathbb{V}_u(\mathbf{x}) \approx \varepsilon^2 \operatorname{Cor}_{\delta u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}}.$$

2. Der absolute Fehler der Approximation von Cov_u ist dritter Ordnung in ε , der relative Fehler aber nur erster Ordnung.

3. Gemäß (3.14) und (3.15) kann man den Erwartungswert und die Kovarianz näherungsweise über u_0 und $\text{Cor}_{\delta u}$ bestimmen. Der Parameter ε ist dabei nur eingeführt worden, um präzise Fehlerschranken für diese Approximationen zu erhalten. In der Praxis steckt die Skalierung in der Zwei-Punkt-Korrelation Cor_β , das heißt, es gilt direkt $\text{Cov}_u \approx \text{Cor}_{\delta u}$.
4. Für “kleine” stochastische Fluktuation (also $\|\beta\|_{L^\infty(D \times \Omega)} \ll 1$) sind die Näherungen durchaus brauchbar. Eine Faustregel besagt, dass die Fluktuationen weniger als 10% des Erwartungswertes des Eingangsparameters betragen sollten.
5. Die hier im Fall eines stochastischen Koeffizienten vorgestellte stochastische Störungstheorie lässt sich natürlich auf viele Problemstellungen verallgemeinern. Voraussetzung ist stets eine Taylor-Entwicklung erster Ordnung (3.10) in ε bezüglich des stochastischen Eingangsparameters, um auf die hier präsentierten asymptotischen Entwicklungen für Erwartungswert und Kovarianz zu schließen.

◇

4. Polynomiales Chaos

4.1 Allgemeine Orthogonalpolynome

Im weiteren sei $w(x)$ eine positive integrierbare Funktion über dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit

$$\int_I w(x) dx < \infty.$$

Eine solche Funktion w bezeichnen wir als *Gewichtsfunktion*. Ist I unbeschränkt, was wir ausdrücklich zulassen wollen, dann benötigen wir folgende zusätzliche Bedingung an die Gewichtsfunktion, nämlich dass

$$\int_I x^\alpha w(x) dx < \infty \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}.$$

Sie ist erfüllt, wenn die Gewichtsfunktion exponentiell in $|x|$ abklingt. Mithilfe der Gewichtsfunktion definieren wir nun das Innenprodukt

$$(f, g)_{L_w^2(I)} := \int_I f(x)g(x)w(x) dx. \quad (4.1)$$

Weiterhin bezeichne im folgenden Π den Raum der reellwertigen Polynome über I und $\Pi_n \subset \Pi$ die Teilmenge der Polynome vom Grad $\leq n$.

Satz 4.1 Zu jeder Gewichtsfunktion w und zugehörigem Innenprodukt (4.1) existiert eine eindeutig bestimmte Folge von Polynomen $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ mit $u_n \in \Pi_n$, für die gilt

$$(u_n, u_m)_{L_w^2(I)} = \delta_{m,n}, \quad u_n(x) = \gamma_n x^n + \dots \quad \text{für ein } \gamma_n > 0. \quad (4.2)$$

Die Folge $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ genügt zudem der Dreitermrekursion

$$a_{n+1}u_{n+1}(x) = (x - b_n)u_n(x) - a_n u_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (4.3)$$

wobei $a_n = \gamma_{n-1}/\gamma_n > 0$, $b_n = (xu_n, u_n)_{L_w^2(I)}$, $u_{-1} \equiv 0$ und

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{(1, 1)_{L_w^2(I)}}} = \frac{1}{\sqrt{\int_I w(x) dx}}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv. Sei $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ eine Orthonormalbasis von

Π_n bezüglich $(\cdot, \cdot)_{L_w^2(I)}$ aus (4.1), die alle im Satz genannten Eigenschaften erfüllt. Ist

$$p_{n+1}(x) = \underbrace{xu_n(x)}_{\in \Pi_{n+1}} - \underbrace{b_n u_n(x)}_{\in \Pi_n} - \underbrace{a_n u_{n-1}(x)}_{\in \Pi_{n-1}} \in \Pi_{n+1},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} (p_{n+1}, u_n)_{L_w^2(I)} &= (xu_n, u_n)_{L_w^2(I)} - b_n \underbrace{(u_n, u_n)_{L_w^2(I)}}_{=1} - a_n \underbrace{(u_{n-1}, u_n)_{L_w^2(I)}}_{=0} \\ &= \underbrace{(xu_n, u_n)_{L_w^2(I)}}_{=b_n} - b_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt zudem

$$\begin{aligned} (p_{n+1}, u_{n-1})_{L_w^2(I)} &= (xu_n, u_{n-1})_{L_w^2(I)} - b_n \underbrace{(u_n, u_{n-1})_{L_w^2(I)}}_{=0} - a_n \underbrace{(u_{n-1}, u_{n-1})_{L_w^2(I)}}_{=1} \\ &= (xu_n, u_{n-1})_{L_w^2(I)} - a_n \\ &\stackrel{(4.1)}{=} (u_n, xu_{n-1})_{L_w^2(I)} - a_n \\ &\stackrel{(4.3)}{=} (u_n, a_n u_n + b_{n-1} u_{n-1} + a_{n-1} u_{n-2})_{L_w^2(I)} - a_n \\ &= a_n \underbrace{(u_n, u_n)_{L_w^2(I)}}_{=1} + b_{n-1} \underbrace{(u_n, u_{n-1})_{L_w^2(I)}}_{=0} + a_{n-1} \underbrace{(u_n, u_{n-2})_{L_w^2(I)}}_{=0} - a_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

und für jedes $m < n - 1$

$$\begin{aligned} (p_{n+1}, u_m)_{L_w^2(I)} &= (xu_n, u_m)_{L_w^2(I)} - b_n \underbrace{(u_n, u_m)_{L_w^2(I)}}_{=0} - a_n \underbrace{(u_{n-1}, u_m)_{L_w^2(I)}}_{=0} \\ &= (u_n, xu_m)_{L_w^2(I)} \\ &= (u_n, a_{m+1} u_{m+1} + b_m u_m + a_m u_{m-1})_{L_w^2(I)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist p_{n+1} für alle $0 \leq m \leq n$ orthogonal zu u_m , und nach Konstruktion gilt

$$p_{n+1}(x) = \gamma_n x^{n+1} + \dots$$

Um das normalisierte Polynom u_{n+1} zu finden, muss p_{n+1} geeignet umskaliert werden. Gesucht ist u_{n+1} derart, dass der Höchstkoeffizient γ_{n+1} positiv ist. Also gilt

$$u_{n+1}(x) = \gamma_{n+1} x^{n+1} + \dots = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} p_{n+1}(x),$$

beziehungsweise $p_{n+1} = a_{n+1} u_{n+1}$.

Ist q_{n+1} ein zweites Polynom, das die Bedingung (4.2) erfüllt, dann folgt

$$q_{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} (q_{n+1}, u_m)_{L_w^2(I)} u_m \stackrel{(4.2)}{=} \underbrace{(q_{n+1}, u_{n+1})_{L_w^2(I)}}_{=:c} u_{n+1},$$

das heißt, q_{n+1} ist ein skalares Vielfaches von u_{n+1} . Wegen

$$(q_{n+1}, q_{n+1})_{L_w^2(I)} = c^2 (u_{n+1}, u_{n+1})_{L_w^2(I)}$$

ergibt sich $c^2 = 1$, also $c = \pm 1$. Da $c = -1$ auf einen negativen Höchstkoeffizienten führt, folgt schließlich $c = 1$ und $q_{n+1} = u_{n+1}$. \square

Beispiele 4.2 Die für uns wichtigen Orthogonalpolynome sind:

- Legendre-Polynome: $w(x) = 1$ und $I = (-1, 1)$
- Jacobi-Polynome: $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ für $\alpha, \beta > -1$ und $I = (-1, 1)$
- Hermite-Polynome: $w(x) = e^{-x^2/2}$ und $I = (-\infty, \infty)$
- Laguerre-Polynome: $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ für $\alpha > -1$ und $I = (0, \infty)$

\triangle

Mit Hilfe der Dreitermrekursion (4.3) lassen sich Orthogonalpolynome numerisch sehr effizient auswerten. Das resultierende Verfahren ähnelt dabei sehr dem Horner-Schema.

Beispiel 4.3 (Legendre-Polynome) Wir betrachten das Intervall $I = (-1, 1)$, ausgestattet mit dem Standard-Innenprodukt, das heißt, $w(x) \equiv 1$. Das *Legendre-Polynom* vom Grad n ist definiert durch

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \in \Pi_n. \quad (4.4)$$

Es gilt $(L_n, L_m)_{L_w^2(I)} = 0$ für $n \neq m$, denn für $m < n$ folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} 2^n n! \ 2^m m! \ (L_n, L_m)_{L_w^2(I)} &= \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \frac{d^m}{dx^m} [(x^2 - 1)^m] dx \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\underbrace{[(x^2 - 1)^n]}_{n\text{-fache Nst. in } \pm 1} \frac{d^m}{dx^m} [(x^2 - 1)^m] \right] \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2 - 1)^n] \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} [(x^2 - 1)^m] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2 - 1)^n] \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} [(x^2 - 1)^m] dx \\ &\quad \vdots \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \underbrace{\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} [(x^2 - 1)^m]}_{\equiv 0, \text{ da } m+n > 2m = \deg[(x^2 - 1)^m]} dx = 0. \end{aligned}$$

Wiederum mit Hilfe partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} 2^n n! \ 2^n n! \ (L_n, L_n)_{L_w^2(I)} &= (-1)^n \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} [(x^2 - 1)^n]}_{=(2n)!} (x^2 - 1)^n dx \\ &= (-1)^n (2n!) \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx \\ &= (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Also ergibt sich $(L_n, L_n)_{L_w^2(I)} = 2/(2n+1)$ und daher ist

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \dots = \gamma_n x^n + \dots \quad (4.5)$$

das zugehörige orthonormale Polynom.

Für die Dreitermrekursion (4.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \sqrt{\frac{2n-1}{2}} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} ((n-1)!)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} \frac{2n^2}{2n(2n-1)} \\ &= \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}. \end{aligned}$$

Wegen (4.4) ist L_n ein gerades Polynom, falls n gerade, und ein ungerades Polynom, falls n ungerade ist. Daher muss b_n in (4.3) verschwinden. Dies bedeutet,

$$\frac{n+1}{\sqrt{4(n+1)^2-1}} u_{n+1}(x) = x u_n(x) - \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}} u_{n-1}(x).$$

△

Beispiel 4.4 (Hermite-Polynome) Im Falle von $I := (-\infty, \infty)$ und der Gewichtsfunktion e^{-x^2} erhalten wir die *Hermite-Polynome*. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind sie definiert durch

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei sie normiert sind gemäß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_m(x) H_n(x) dx = \frac{1}{n!} \delta_{m,n}.$$

Mit $H_{-1} := 0$ folgt die Dreitermrekursion

$$(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

△

Die jeweils ersten Legendre- und Hermite-Polynome sind nachfolgend tabelliert:

Grad	Legendre-Polynom	Hermite-Polynom
0	$L_0(x) = 1$	$H_0(x) = 1$
1	$L_1(x) = x$	$H_1(x) = x$
2	$L_2(x) = (3x^2 - 1)/2$	$H_2(x) = (x^2 - 1)/2$
3	$L_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$	$H_3(x) = (x^3 - 3x)/6$
4	$L_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$	$H_4(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)/24$
5	$L_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$	$H_5(x) = (x^5 - 10x^3 + 15x)/120$
⋮	⋮	⋮

Offensichtlich liegt die Menge aller Polynome dicht in $L_w^2(I)$, falls I ein beschränktes Intervall ist. Im Fall eines unbeschränkten Intervalls bleibt diese Aussage gültig, falls die Gewichtsfunktion exponentiell abklingt, was wir annehmen wollen. Folglich bilden die Orthonormalpolynome $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ eine Orthonormalbasis von $L_w^2(I)$. Für jedes $f \in L_w^2(I)$ gilt daher die Entwicklungsformel

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (f, u_i)_{L_w^2(I)} u_i$$

und die *Parsevalsche Identität*

$$\|f\|_{L_w^2(I)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (f, u_i)_{L_w^2(I)}^2.$$

Die Bestapproximation von $f \in L_w^2(I)$ in Π_n ist durch

$$f_n = \sum_{i=0}^n (f, u_i)_{L_w^2(I)} u_i$$

gegeben, dies bedeutet,

$$\|f - f_n\|_{L_w^2(I)} = \inf_{g \in \Pi_n} \|f - g\|_{L_w^2(I)}.$$

Ferner gilt die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{i=0}^n (f, u_i)_{L_w^2(I)}^2 \leq \|f\|_{L_w^2(I)}^2.$$

4.2 Eindimensionale Chaospolynome

Wir betrachten eine Zufallsgröße $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) . Die Verteilung der Zufallsgröße sei durch eine stückweise stetige Dichtefunktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, das heißt,

$$P(\xi \leq a) = \int_{-\infty}^a \rho(\xi) \, d\xi.$$

Der Träger der Dichtefunktion

$$\text{supp}(\rho) = \overline{\{\xi \in \mathbb{R} : \rho(\xi) > 0\}}$$

sei ein zusammenhängendes, abgeschlossenes Intervall \bar{I} mit $I = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ ausdrücklich zugelassen sind. Die Dichtefunktion sei im Innern dieses Intervalls positiv, eine Eigenschaft, die für alle Standardverteilungen gültig ist. Für eine messbare Funktion $f \in L_\rho^1(I)$ erhalten wir dann eine Zufallsgröße $f \circ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{E}(f(\xi)) = \int_{\Omega} (f \circ \xi)(\omega) \, dP(\omega) = \int_I f(\xi) \rho(\xi) \, d\xi.$$

Für zwei Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f, g \in L_\rho^2(I)$ ist die Abbildung

$$(f, g)_{L_\rho^2(I)} := \int_I f(\xi) g(\xi) \rho(\xi) \, d\xi$$

ein reelles Innenprodukt der Form (4.1). Nach dem vorhergehenden Abschnitt existiert also eine Folge von Orthogonalpolynomen $\{u_n\}_{n=0}^\infty$.

Beispiel 4.5 Für einige stetige Standardverteilungen erhalten wir folgende Orthogonalpolynome:

Zufallsgröße	Orthogonalpolynome	Intervall I
Normalverteilung	Hermite-Polynome	$(-\infty, \infty)$
Gleichverteilung	Legendre-Polynome	(a, b)
Gamma-Verteilung	Laguerre-Polynome	$(0, \infty)$
Beta-Verteilung	Jacobi-Polynome	(a, b)

△

Im folgenden sei $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ eine Folge orthogonaler Polynome zu einer gegebenen Verteilung. Wir bezeichnen die Polynome auch als *Basisfunktionen* und beachten, dass $u_0 = 1$ aufgrund der Normierung der Dichte ρ ist. Eine Folgerung aus der Orthogonalität ist dann

$$\mathbb{E}(u_n(\xi)) = \int_I u_n(\xi) \rho(\xi) d\xi = (1, u_n)_{L^2_\rho(I)} = 0 \quad \text{für alle } n \geq 1 \quad (4.6)$$

und

$$\mathbb{E}(u_0(\xi)) = \int_I 1 \cdot \rho(\xi) d\xi = P(\Omega) = 1. \quad (4.7)$$

Ist ein beliebiges Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i(x) \in \Pi_n$ gegeben, so folgt daher für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(p(\xi)) = \int_I p(\xi) \rho(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_I u_i(\xi) \rho(\xi) d\xi = \alpha_0. \quad (4.8)$$

Wegen

$$\mathbb{E}(p^2(\xi)) = \int_I p^2(\xi) \rho(\xi) d\xi = \sum_{i,j=0}^n \alpha_i \alpha_j \underbrace{\int_I u_i(\xi) u_j(\xi) \rho(\xi) d\xi}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2$$

gilt für die Varianz

$$\mathbb{V}(p(\xi)) = \mathbb{E}(p^2(\xi)) - \mathbb{E}^2(p(\xi)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2. \quad (4.9)$$

Sind die Koeffizienten eines Polynoms in der Orthogonalbasis gegeben, so erhalten wir folglich direkt Erwartungswert und Varianz.

Der Erwartungswert eines allgemeinen Polynoms in der Monombasis $p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \in \Pi_n$ kann auch analytisch bestimmt werden, ohne die Darstellung in der Orthogonalbasis zu berechnen. Es gilt

$$\mathbb{E}(p(\xi)) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \xi^i\right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{E}(\xi^i). \quad (4.10)$$

Daher brauchen nur die Momente der Verteilung bestimmt werden. Im Fall der Gleichverteilung auf $I = (-1, 1)$ gilt

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 1/(n+1), & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

im Fall der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ folgt

$$\mathbb{E}(\xi^n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1), & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Man beachte, dass bei der Bestimmung der Erwartungswerte über (4.10) Auslöschung auftreten kann. Dieser Effekt wird schon bei $n > 10$ beobachtet. Dies liegt daran, dass die Monombasis numerisch hochgradig instabil ist.

4.3 Mehrdimensionale Chaospolynome

Definition 4.6 Die N Zufallsgrößen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ mit $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißen (**stochastisch unabhängig**), wenn für alle $a_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(\xi_1 \leq a_1, \xi_2 \leq a_2, \dots, \xi_N \leq a_N) = \prod_{i=1}^N P(\xi_i \leq a_i).$$

Satz 4.7 Die Zufallsgrößen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, welche jeweils durch die Dichten $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ beschrieben werden, sind genau dann unabhängig, wenn die Dichte $\rho(\boldsymbol{\xi})$ der Zufallsgröße $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ die Form $\rho(\boldsymbol{\xi}) = \rho_1(\xi_1)\rho_2(\xi_2) \cdots \rho_N(\xi_N)$ besitzt.

Beweis. Zerfällt die Dichte der Zufallsgröße $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ in das Produkt $\rho(\boldsymbol{\xi}) = \rho_1(\xi_1)\rho_2(\xi_2) \cdots \rho_N(\xi_N)$, dann gilt

$$\begin{aligned} & P(\xi_1 \leq a_1, \xi_2 \leq a_2, \dots, \xi_N \leq a_N) \\ &= \int_{(-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2] \times \cdots \times (-\infty, a_N]} \rho(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{a_1} \rho_1(\xi_1) d\xi_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{a_2} \rho_2(\xi_2) d\xi_2 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{a_N} \rho_N(\xi_N) d\xi_N \right) \\ &= P(\xi_1 \leq a_1)P(\xi_2 \leq a_2) \cdots P(\xi_N \leq a_N). \end{aligned}$$

Folglich sind $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ unabhängig. Die umgekehrte Aussage erhält man, indem man dieser Argumentation rückwärts folgt. \square

Bemerkung Zwei unabhängige Zufallsgrößen $\xi_1, \xi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind offensichtlich auch unkorreliert. Unkorrelierte Zufallsgrößen müssen aber nicht unbedingt unabhängig sein. Im Fall normalverteilter Zufallsgrößen ist jedoch beides äquivalent. \diamond

Sind die Zufallsgrößen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ mit $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängig und jeweils durch eine Dichtefunktion ρ_i mit Träger \bar{I}_i beschrieben, dann ist die mehrdimensionale Dichtefunktion ρ gerade das Produkt der eindimensionalen Dichten

$$\rho : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^N \rho_i(\xi_i),$$

wobei $\mathbf{I} := \bigotimes_{i=1}^N I_i$ ist. Es gilt damit für eine messbare Funktion $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)) = \int_{\mathbf{I}} f(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}$$

und

$$\mathbb{V}(f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)) = \int_{\mathbf{I}} f^2(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}^2(f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)).$$

Es bezeichne $\{u_n^i\}_{n=0}^\infty$ jeweils die polynomiale Orthonormalbasis zur Verteilung der Zufallsgrößen ξ_i , das heißt, bezüglich der Dichte ρ_i . Für jeden Multiindex $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ definieren wir ein mehrdimensionales Polynom vom Grad $|\boldsymbol{\alpha}|$ gemäß

$$u_{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) := \prod_{i=1}^n u_{\alpha_i}^i(\xi_i).$$

Aus

$$\begin{aligned} (u_{\boldsymbol{\alpha}}, u_{\boldsymbol{\beta}})_{L_{\boldsymbol{\rho}}^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbf{I}} u_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) u_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbf{I}} \left(\prod_{i=1}^N u_{\alpha_i}^i(\xi_i) \right) \left(\prod_{i=1}^N u_{\beta_i}^i(\xi_i) \right) \left(\prod_{i=1}^N \rho_i(\xi_i) \right) \, d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \\ &= \prod_{i=1}^N \left(\underbrace{\int_{I_i} u_{\alpha_i}^i(\xi_i) u_{\beta_i}^i(\xi_i) \rho_i(\xi_i) \, d\xi_i}_{=\delta_{\alpha_i, \beta_i}} \right) \\ &= \delta_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

folgt, dass das System $\{u_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{|\boldsymbol{\alpha}| \geq 0}$ ein vollständiges Orthonormalsystem zum Innenprodukt $(\cdot, \cdot)_{L_{\boldsymbol{\rho}}^2(\mathbf{I})}$ bildet. Daher folgt analog zu (4.6) und (4.7)

$$\mathbb{E}(u_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ein beliebiges Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$,

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq n} c_{\boldsymbol{\alpha}} u_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}),$$

ergibt sich schießlich analog zu (4.8) und (4.9) wieder

$$\mathbb{E}(p(\boldsymbol{\xi})) = c_{\mathbf{0}}$$

und

$$\mathbb{V}(p(\boldsymbol{\xi})) = \mathbb{E}(p^2(\boldsymbol{\xi})) - \mathbb{E}^2(p(\boldsymbol{\xi})) = \sum_{0 < |\boldsymbol{\alpha}| \leq n} c_{\boldsymbol{\alpha}}^2.$$

4.4 Stochastische Approximation

Gegeben sei eine Zufallsgröße $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$Y(\omega) = f(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_N(\omega)), \quad (4.11)$$

gebildet aus N unabhängigen Zufallsgrößen $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit zugehöriger Dichtefunktion ρ_i . Es sei $\rho(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^N \rho_i(\xi_i)$ die gemeinsame Dichtefunktion auf dem Intervall $\mathbf{I} := \bigotimes_{i=1}^N I_i$. Da das System $\{u_\alpha\}_{|\alpha| \geq 0}$ ein vollständiges Orthonormalsystem zum Innenprodukt $(\cdot, \cdot)_{L^2_\rho(\mathbf{I})}$ bildet, existiert eine Darstellung

$$Y(\omega) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha u_\alpha(\boldsymbol{\xi}(\omega)),$$

vorausgesetzt es ist Y quadratisch integrierbar. Die Koeffizienten berechnen sich dabei wie folgt:

$$c_\alpha = (f, u_\alpha)_{L^2_\rho(\mathbf{I})} = \int_{\mathbf{I}} f(\boldsymbol{\xi}) u_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}.$$

Definition 4.8 Eine Approximation einer Zufallsgröße $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Form (4.11) durch

$$Y_M(\omega) = \sum_{|\alpha| \leq M} c_\alpha u_\alpha(\boldsymbol{\xi}(\omega)) \quad (4.12)$$

heißt **stochastische Diskretisierung**.

Die Anzahl der Basispolynome steigt mit der Dimension N des stochastischen Eingangs und dem Polynomgrad M stark an:

Lemma 4.9 Im \mathbb{R}^N ist die Anzahl der Polynome vom Grad M gegeben durch

$$|\{u_\alpha\}_{|\alpha| \leq M}| = \binom{N+M}{M} = \frac{(N+M)!}{N!M!}.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst induktiv über die Dimension N , dass die Anzahl der Polynome vom Grad genau M

$$\sum_{|\alpha|=M} 1 = \binom{N+M-1}{M} = \frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!}$$

beträgt. Für $N = 1$ ist diese Aussage offensichtlich richtig. Für $N \geq 2$ fixieren wir den Polynomgrad $0 \leq m \leq M$ in der ersten Dimension und wählen dann ein beliebiges Polynom vom Grad genau $M - m$ in den anderen $N - 1$ Dimensionen. Demnach haben wir also

$$\sum_{|\alpha|=M} 1 = \sum_{m=0}^M \binom{N+(M-m)-2}{M-m} = \sum_{m=0}^M \binom{N+m-2}{m} = \binom{N+M-1}{M}.$$

Hieraus folgt dann induktiv sofort die Behauptung, denn es ist

$$\begin{aligned} |\{u_\alpha\}_{|\alpha|\leq M}| &= |\{u_\alpha\}_{|\alpha|<M}| + |\{u_\alpha\}_{|\alpha|=M}| \\ &= \binom{N+M-1}{M-1} + \binom{N+M-1}{M} \\ &= \binom{N+M}{M}. \end{aligned}$$

□

Sind die Koeffizienten der Entwicklung (4.12) bekannt, so folgt für den Erwartungswert und die Varianz von $Y_M(\omega)$ sofort gemäß

$$\mathbb{E}(Y_M) = \mathbb{E}\left(\sum_{|\alpha|\leq M} c_\alpha u_\alpha(\boldsymbol{\xi}(\omega))\right) = c_0 \approx \mathbb{E}(Y)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_M) &= \mathbb{E}\left(\left((Y_M - \mathbb{E}(Y_M))^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{0<|\alpha|,|\beta|\leq M} c_\alpha c_\beta u_\alpha(\boldsymbol{\xi}(\omega)) u_\beta(\boldsymbol{\xi}(\omega))\right) \\ &= \sum_{0<|\alpha|\leq M} c_\alpha^2 \approx \mathbb{V}(Y). \end{aligned}$$

Beispiel 4.10 Wir betrachten folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{y}(t, \omega) = \xi(\omega)y(t, \omega), \quad y(0, \omega) = 1, \quad t \in [0, T]. \quad (4.13)$$

Dabei ist $\xi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein stochastischer Eingangsparameter. Für gegebenen Wert $\xi(\omega)$ folgt als Lösung von (4.13) gerade

$$y(t, \omega) = e^{\xi(\omega)t}.$$

Die explizite Lösungsformel erlaubt es für gewisse Verteilungen, Erwartungswert und Varianz direkt zu bestimmen.

Für eine auf $(-1, 1)$ gleichverteilte Zufallsgröße folgt

$$\mathbb{E}(y(t, \omega)) = \int_{-1}^1 \frac{e^{\xi t}}{2} d\xi = \frac{1}{2t}(e^t - e^{-t}), \quad t \in [0, T]$$

und

$$\mathbb{E}(y^2(t, \omega)) = \int_{-1}^1 \frac{e^{2\xi t}}{2} d\xi = \frac{1}{4t}(e^{2t} - e^{-2t}), \quad t \in [0, T]$$

dies bedeutet

$$\mathbb{V}(y(t, \omega)) = \frac{1}{4t^2}(2 - (1-t)e^{2t} - (1+t)e^{-2t}).$$

Im Fall einer $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilten Zufallsgröße erhält man

$$\mathbb{E}(y(t, \omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi t} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi = e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\xi-t)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi}_{=1} = e^{t^2/2}, \quad t \in [0, T].$$

Aus

$$\mathbb{E}(y^2(t, \omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\xi t} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi = e^{2t^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\xi-2t)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi}_{=1} = e^{2t^2}, \quad t \in [0, T]$$

ergibt sich schließlich $\mathbb{V}(y(t, \omega)) = e^{t^2}(e^{t^2} - 1)$.

Sei $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ das System der Orthonormalpolynome bezüglich der Dichtefunktion zur Verteilung des stochastischen Koeffizienten ξ . Wir führen nun für die Lösung von (4.13) folgenden Separationsansatz durch

$$y(t, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) u_i(\xi(\omega)), \quad v_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Abbruch der Reihenentwicklung liefert die stochastische Approximation

$$y_M(t, \omega) = \sum_{i=0}^M v_i(t) u_i(\xi(\omega)), \quad v_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Einsetzen in (4.13) erzeugt das Residuum

$$r(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=0}^M v_i(t) u_i(\xi(\omega)) \right) - \xi(\omega) \sum_{i=0}^M v_i(t) u_i(\xi(\omega)). \quad (4.14)$$

Ziel ist es nun, die Koeffizienten $\{v_i\}$ so zu wählen, dass das Residuum klein wird. Eine geeignete Strategie ist der Galerkin-Ansatz, das heißt, man fordert

$$\int_{\Omega} r(t, \omega) u_j(\xi(\omega)) dP(\omega) = 0 \quad \text{für alle } j = 0, 1, \dots, M.$$

Dieser Ansatz, angewendet auf (4.14), liefert durch Vertauschung von Integration und Differentiation die $M + 1$ Gleichungen

$$\sum_{i=0}^M \dot{v}_i(t) \underbrace{\int_I u_i(\xi) u_j(\xi) \rho(\xi) d\xi}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=0}^M v_i(t) \int_I \xi u_i(\xi) u_j(\xi) \rho(\xi) d\xi, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Wir erhalten also ein deterministisches System von Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (M+1)}, \quad \mathbf{v}(t) = (v_0(t), v_1(t), \dots, v_M(t)), \quad (4.15)$$

wobei die Systemmatrix \mathbf{A} tridiagonal ist.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems (4.15) liefert uns sofort eine Approximation für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\mathbb{E}(y(t, \omega)) \approx v_0(t), \quad \mathbb{V}(y(t, \omega)) \approx \sum_{i=1}^M v_i^2(t).$$

Nachfolgend findet sich die Abweichung beider Approximationen gegenüber den exakten Größen an der Stelle $t = 1$ im Fall der Gleich- und der Normalverteilung. Zum Vergleich ist zusätzlich auch die Monte-Carlo-Methode mit $K = 10^4$ Realisierungen durchgeführt worden.

Verteilung	MC $K = 10^4$		PC $M = 4$		PC $M = 9$	
	$\mathbb{E}(y(1))$	$\mathbb{V}(y(1))$	$\mathbb{E}(y(1))$	$\mathbb{V}(y(1))$	$\mathbb{E}(y(1))$	$\mathbb{V}(y(1))$
Gleichverteilung	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$7.5 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$
Normalverteilung	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-1}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$8.7 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-9}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$

△

Beispiel 4.11 Wir betrachten nun die partielle Differentialgleichung (3.7) mit stochastischem Diffusionskoeffizienten $\alpha(\mathbf{x}, \omega) \in L^\infty(D \times \Omega)$. Der Diffusionskoeffizient habe die Form

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \alpha_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega)$$

mit $\alpha_i \in L^\infty(D)$ und $\xi_i \in L^2_P(\Omega)$ für alle $i = 1, 2, \dots, N$. Dabei seien alle Zufallsgrößen $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängig und gleichverteilt auf $(-1, 1)$. Aus $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, N$ folgt

$$\mathbb{E}(\alpha(\mathbf{x}, \omega)) = \alpha_0(\mathbf{x})$$

und

$$\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2^N} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{y}) \underbrace{\int_{\mathbf{I}} \xi_i \xi_j \, d\xi}_{=2^N \delta_{i,j}/3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \alpha_i(\mathbf{y}).$$

Um die Lösung $u(\mathbf{x}, \omega) = u(\mathbf{x}, \xi_1(\omega), \dots, \xi_N(\omega))$ der stochastischen partiellen Differentialgleichung (3.7) zu approximieren, machen wir den Separationsansatz

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{|\mu| \leq M} v_\mu(\mathbf{x}) L_\mu(\boldsymbol{\xi}(\omega)), \quad \text{wobei } L_\mu(\boldsymbol{\xi}(\omega)) = \prod_{i=1}^N L_{\mu_i}(\xi_i(\omega)).$$

Hier bezeichnet L_i das i -te Legendre-Polynome aus Beispiel 4.3. Die $(N+M)!/(N!M!)$ Funktionen v_μ sind jeweils aus $H_0^1(D)$.

Eine Semidiskretisierung erhalten wir, indem wir zur Variationsformulierung bezüglich der stochastischen Variablen $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{I} := (-1, 1)^N$ übergehen und dort eine Galerkin-Diskretisierung durchführen: suche Funktionen $v_\mu \in H_0^1(D)$, so dass

$$\begin{aligned} - \sum_{|\mu| \leq M} \int_{\mathbf{I}} \text{div}_{\mathbf{x}} \left(\left[\alpha_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \xi_i \right] \nabla_{\mathbf{x}} v_\mu(\mathbf{x}) L_\mu(\boldsymbol{\xi}) \right) L_\nu(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \\ \stackrel{!}{=} \underbrace{\int_{\mathbf{I}} f(\mathbf{x}) L_\nu(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}}_{=2^N \delta_{0,\nu} f(\mathbf{x})} = 2^N \delta_{0,\nu} f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

für alle $|\nu| \leq M$. Ähnlich zum vorigen Beispiel ergibt sich folglich ein gekoppeltes System von partiellen Differentialgleichungen für die unbekanntenen Funktionen $v_\mu \in H_0^1(D)$.

Weil das direkte Lösen dieses Systems viel zu teuer wäre, werden wir eine andere Polynombasis $\{P_i\}_{i=0}^M$ bestimmen, bezüglich der das System vollständig entkoppelt. Dazu berechnen wir die Eigenpaare des Multiplikationsoperators

$$\mathcal{S} : L^2((-1, 1)) \rightarrow L^2((-1, 1)), \quad v(t) \mapsto tv(t)$$

mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens in Π_M . Dies bedeutet, wir gehen zur Variationsformulierung in $L^2((-1, 1))$ über, welche wir dann auf den endlichdimensionalen Polynomraum Π_M einschränken:

suche $(P, \lambda) \in \Pi_M \times \mathbb{R}$, so dass $\int_{-1}^1 tP(t)Q(t) dt = \lambda \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ für alle $Q \in \Pi_M$.

Unter Verwendung der Basis $\{L_i\}_{i=0}^M$ folgt, dass wir $P = \sum_{i=0}^M p_i L_i \in \Pi_M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ suchen, so dass

$$\sum_{i=0}^M p_i \int_{-1}^1 tL_i(t)L_j(t) dt = \lambda \sum_{i=0}^M p_i \underbrace{\int_{-1}^1 L_i(t)L_j(t) dt}_{=2\delta_{i,j}/(2j+1)} = \frac{2\lambda p_j}{2j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Dies ist äquivalent zum verallgemeinerten diskreten Eigenwertproblem $\mathbf{S}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{D}\mathbf{p}$, wobei $\mathbf{S} = [s_{i,j}]_{i,j=0}^M$ und $\mathbf{D} = [d_{i,j}]_{i,j=0}^M$ ist mit

$$\left. \begin{aligned} s_{i,j} &= \int_{-1}^1 tL_i(t)L_j(t) dt, \\ d_{i,j} &= \int_{-1}^1 L_i(t)L_j(t) dt = \frac{2\delta_{i,j}}{2j+1}, \end{aligned} \right\} \quad i, j = 0, 1, \dots, M.$$

Da die Matrizen $\mathbf{S}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (M+1)}$ symmetrisch sind und \mathbf{D} sogar positiv definit ist, finden wir $M+1$ orthogonale Eigenvektoren \mathbf{q}_i mit zugehörigem Eigenwert λ_i des äquivalenten gewöhnlichen Eigenwertproblems

$$\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{p}.$$

Für die zugehörigen Polynome $P_i = \sum_{k=0}^M p_{i,k} L_k$ folgt dann

$$\int_{-1}^1 tP_i(t)P_j(t) dt = \lambda_i \int_{-1}^1 P_i(t)P_j(t) dt = \lambda_i \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, M.$$

Dies bedeutet, $\{P_i\}_{i=0}^M$ ist eine Folge von doppelt-orthogonalen Polynomen in Π_M . Da jedoch jedes P_i im allgemeinen ein Polynom genau vom Grad M ist, müssen wir den Ansatz- und Testraum vergrößern. Daher wählen wir nun den Tensorproduktansatz

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{\|\boldsymbol{\mu}\|_\infty \leq M} v_\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) P_\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}(\omega)), \quad \text{wobei } P_\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}(\omega)) = \prod_{i=1}^N P_{\mu_i}(\xi_i(\omega)).$$

Diese neue Basis, eingesetzt in (4.16), liefert ein vollständig entkoppeltes System von $(M+1)^N$ partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\|\boldsymbol{\mu}\|_\infty \leq M} \int_{\mathbf{I}} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\left[\alpha_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \xi_i \right] \nabla_{\mathbf{x}} v_\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) P_\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}) \right) P_\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= - \sum_{\|\boldsymbol{\mu}\|_\infty \leq M} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\left[\alpha_0(\mathbf{x}) \underbrace{\int_{\mathbf{I}} P_\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}) P_\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}_{=\delta_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}} + \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \underbrace{\int_{\mathbf{I}} \xi_i P_\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\xi}) P_\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}_{=\lambda_{\nu_i} \delta_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}} \right] \nabla_{\mathbf{x}} v_\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \right) \\ &= - \operatorname{div} \left(\left[\alpha_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) \lambda_{\nu_i} \right] \nabla v_\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \right) \stackrel{!}{=} f(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{I}} P_\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \|\boldsymbol{\nu}\|_\infty \leq M. \end{aligned}$$

Alles was man schließlich noch benötigt ist ein Standardlöser für elliptische Differentialgleichungen. Da jedoch sehr viele partielle Differentialgleichungen gelöst werden müssen, sollte dieser die Lösung möglichst schnell berechnen. \triangle

5. Karhunen-Loève-Entwicklung

5.1 Eigenwerte symmetrischer kompakter Operatoren

Lemma 5.1 Es sei $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ein stetiger und symmetrischer Operator. Dann gilt

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}.$$

Beweis. Einerseits ist für jedes normierte $u \in L^2(D)$

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} \leq \|\mathcal{K}\| \|u\|_{L^2(D)}^2 = \|\mathcal{K}\|.$$

Andererseits haben wir für ein beliebiges $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} 4\|\mathcal{K}v\|_{L^2(D)}^2 &= \left(\mathcal{K} \left[\lambda v + \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}v \right], \lambda v + \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}v \right)_{L^2(D)} - \left(\mathcal{K} \left[\lambda v - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}v \right], \lambda v - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}v \right)_{L^2(D)} \\ &\leq \left\{ \left\| \lambda v + \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}v \right\|_{L^2(D)}^2 + \left\| \lambda v - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}v \right\|_{L^2(D)}^2 \right\} \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} \\ &= 2 \left\{ \lambda^2 \|v\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|\mathcal{K}v\|_{L^2(D)}^2 \right\} \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $\lambda^2 = \|\mathcal{K}v\|_{L^2(D)} / \|v\|_{L^2(D)}$ ein, so folgt

$$\|\mathcal{K}v\|_{L^2(D)} \leq \|v\|_{L^2(D)} \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}.$$

Da diese Ungleichung trivialerweise auch im Fall $\|\mathcal{K}v\|_{L^2(D)} = 0$ richtig ist, folgt das Behauptete. \square

Definition 5.2 Ein Operator $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ heißt kompakt, falls er stetig ist und das Bild jeder beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 5.3 Ist $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ein symmetrischer, positiv semidefiniter und kompakter Operator, so erhält man eine Orthonormalfolge $\{v_n\}$ von Eigenvektoren, indem man zunächst eine Lösung v_1 der Variationsaufgabe

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} \stackrel{!}{=} \max \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \|u\|_{L^2(D)} = 1$$

und dann sukzessive für $n = 2, 3, \dots$ eine Lösung v_n der Aufgabe

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} \stackrel{!}{=} \max \quad \text{unter den Nebenbedingungen} \quad \|u\|_{L^2(D)} = 1 \\ \text{und} \quad (u, v_k)_{L^2(D)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

bestimmt, solange dieses Maximum positiv ist. Der zu v_n gehörige (positive) Eigenwert λ_n ist gleich diesem Maximum. Das geschilderte Verfahren liefert jeden Eigenwert $\neq 0$ von \mathcal{K} , so oft wie es seine Vielfachheit angibt, und es gilt die Entwicklung

$$\mathcal{K}u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (u, v_n)_{L^2(D)} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{K}u, v_n)_{L^2(D)} v_n \quad \text{für alle } u \in L^2(D).$$

Die Folge $\{\lambda_n\}$ bricht entweder ab oder strebt gegen 0.

Beweis. Ist $0 \neq \mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ein symmetrischer, positiv semidefiniter und kompakter Operator, dann gilt nach Lemma 5.1

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}.$$

Infolgedessen existiert eine Folge $\{u_n\}$ und eine Zahl λ mit $\lambda = \|\mathcal{K}\| > 0$, so dass

$$\|u_n\|_{L^2(D)} = 1 \quad \text{und} \quad (u_n, \mathcal{K}u_n)_{L^2(D)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda.$$

Aus

$$0 \leq \|\mathcal{K}u_n - \lambda u_n\|_{L^2(D)}^2 \\ = \|\mathcal{K}u_n\|_{L^2(D)}^2 - 2\lambda (u_n, \mathcal{K}u_n)_{L^2(D)} + \lambda^2 \|u_n\|_{L^2(D)}^2 \\ \leq \|\mathcal{K}\|^2 - 2\lambda (u_n, \mathcal{K}u_n)_{L^2(D)} + \|\mathcal{K}\|^2$$

folgt nun

$$\mathcal{K}u_n - \lambda u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{5.1}$$

Wegen der Kompaktheit von \mathcal{K} besitzt $\{\mathcal{K}u_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{\mathcal{K}u_{n_i}\}$. Aus (5.1) folgt nun, dass dann auch $\{u_{n_i}\}$ gegen eine normierte Funktion v strebt mit $\mathcal{K}v = \lambda v$, also dass v eine Eigenlösung zum Eigenwert $\lambda = \|\mathcal{K}\|$ ist. Offenbar gilt

$$(v, \mathcal{K}v)_{L^2(D)} = \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} (u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}$$

und umgekehrt ist jede Funktion v , die dieser Gleichung genügt, eine Eigenlösung von \mathcal{K} zum Eigenwert $\|\mathcal{K}\|$ (man wähle $u_n \equiv v$).

Sei nun $\lambda_1 := \lambda$, $v_1 := v$ und

$$E_1 := \text{span}\{v_1\}^\perp = \{u \in L^2(D) : (u, v_1)_{L^2(D)} = 0\}.$$

Die Einschränkung \mathcal{K}_1 von \mathcal{K} auf E_1 ist wieder ein kompakter, positiv semidefiniter und symmetrischer Operator. Nach dem soeben Bewiesenen besitzt \mathcal{K}_1 , falls $\mathcal{K}_1 \neq 0$ ist, einen Eigenwert λ_2 mit $0 < \lambda_2 = \|\mathcal{K}_1\| \leq \|\mathcal{K}\| = \lambda_1$. Die Funktion v_2 sei eine zugehörige normierte Eigenlösung. Ist \mathcal{K}_2 die Einschränkung von \mathcal{K} auf

$$E_2 := \text{span}\{v_1, v_2\}^\perp = \{u \in L^2(D) : (u, v_i)_{L^2(D)} = 0, i = 1, 2\},$$

so liefern die selben Schlüsse, falls $\mathcal{K}_2 \neq 0$ ist, einen Eigenwert λ_3 von \mathcal{K}_2 mit $0 < \lambda_3 = \|\mathcal{K}_2\| \leq \|\mathcal{K}_1\| = \lambda_2$ und eine zugehörige Eigenlösung v_3 . Trivialerweise sind v_2, v_3 auch Eigenlösungen von \mathcal{K} zu den Eigenwerten λ_2, λ_3 . Der Fortgang des Verfahrens ist nun klar. Man erhält also eine möglicherweise abbrechende Eigenwertfolge

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$$

und eine Orthonormalfolge $\{v_n\}$ von zugehörigen Eigenlösungen. Die Folge $\{\lambda_n\}$ bricht genau dann mit λ_m ab, wenn \mathcal{K} auf

$$E_m := \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}^\perp = \{u \in L^2(D) : (u, v_i)_{L^2(D)} = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

verschwindet. In diesem Fall ist $L^2(D) = E_m \overset{\perp}{\oplus} \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, also

$$u = \sum_{n=1}^m (u, v_n) v_n + w \quad \text{mit } w \in E_m$$

und somit

$$\mathcal{K}u = \sum_{n=0}^m \lambda_n (u, v_n)_{L^2(D)} v_n.$$

Bricht $\{\lambda_n\}$ nicht ab, dann strebt $\lambda_n \rightarrow 0$. Andernfalls wäre nämlich die Folge $\{v_n/\lambda_n\}$ beschränkt, und ihre Bildfolge $\{\mathcal{K}v_n/\lambda_n\} = \{v_n\}$ müsste somit eine konvergente Teilfolge enthalten. Wegen $\|v_n - v_m\|_{L^2(D)} = \sqrt{2}$ für $n \neq m$ ist dies aber unmöglich. Für beliebiges $u \in L^2(D)$ ist

$$u_m = u - \sum_{n=1}^m (u, v_n)_{L^2(D)} v_n \in E_m,$$

infolgedessen ist $\|\mathcal{K}u_m\|_{L^2(D)} \leq \|\mathcal{K}_m\| \|u_m\|_{L^2(D)} = \lambda_{m+1} \|u_m\|_{L^2(D)}$ und

$$\|u_m\|_{L^2(D)}^2 = \|u\|_{L^2(D)}^2 - \sum_{n=1}^m (u, v_n)_{L^2(D)}^2 \leq \|u\|_{L^2(D)}^2.$$

Daraus folgt $\mathcal{K}u_m \rightarrow 0$, also

$$\mathcal{K}u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, v_n)_{L^2(D)} v_n.$$

In der Folge $\{\lambda_n\}$ tritt jeder Eigenwert $\neq 0$ von \mathcal{K} so oft auf, wie es seiner Vielfachheit entspricht. Andernfalls gäbe es eine Eigenlösung u mit $\mathcal{K}u \neq 0$ und $u \perp v_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für die dann absurderweise

$$\mathcal{K}u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, v_n)_{L^2(D)} v_n = 0$$

sein müsste. □

5.2 Hilbert-Schmidt-Operatoren

Definition 5.4 Ein Operator \mathcal{K} heißt **Integraloperator** mit der **Kernfunktion** $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, wenn er von der Form

$$(\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = \int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \mathbf{x} \in D,$$

ist. Ein Kern $k \in L^2(D \times D)$ heißt **Hilbert-Schmidt-Kern**, der zugehörige Integraloperator wird **Hilbert-Schmidt-Operator** genannt.

Wegen

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}u, v)_{L^2(D)} &= \int_D \left(\int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_D \left(\int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= (u, \mathcal{K}^*v)_{L^2(D)}, \end{aligned}$$

ist ein Integraloperator \mathcal{K} offensichtlich genau dann symmetrisch, wenn sein Kern symmetrisch ist:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$

Wir benötigen zunächst nachfolgendes Lemma:

Lemma 5.5 Konvergiert die Folge $\{\mathcal{K}_n\}$ von kompakten Operatoren $\mathcal{K}_n : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ gleichmäßig gegen \mathcal{K} , so ist $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ kompakt.

Beweis. Zum Beweis sei $\{u_i\}$ eine beschränkte Folge in $L^2(D)$: $\|u_i\|_{L^2(D)} \leq \gamma$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{u_{1,i}\}$ von $\{u_i\}$, so dass $\{\mathcal{K}_1 u_{1,i}\}$ konvergiert, ferner eine Teilfolge $\{u_{2,i}\}$ von $\{u_{1,i}\}$, so dass $\{\mathcal{K}_2 u_{2,i}\}$ konvergiert und so weiter. Die Diagonalglieder $v_i := u_{i,i}$ bilden dann — ab einem gewissen Index — eine Teilfolge jeder der Folgen $\{u_{k,1}, u_{k,2}, \dots\}$, und deshalb konvergiert die Folge $\{\mathcal{K}_n v_i\}$ für jeden Operator \mathcal{K}_n . Es werde nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und dazu ein n_0 so bestimmt, dass $\|\mathcal{K}_{n_0} - \mathcal{K}\| < \varepsilon$ ist. Legt man ein i_0 so fest, dass für $i, k \geq i_0$ stets $\|\mathcal{K}_{n_0} v_i - \mathcal{K}_{n_0} v_k\| < \varepsilon$ bleibt, so ist für diese i, k

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}v_i - \mathcal{K}v_k\|_{L^2(D)} &\leq \|\mathcal{K}v_i - \mathcal{K}_{n_0}v_k\|_{L^2(D)} + \|\mathcal{K}_{n_0}v_i - \mathcal{K}_{n_0}v_k\|_{L^2(D)} + \|\mathcal{K}_{n_0}v_k - \mathcal{K}v_k\|_{L^2(D)} \\ &< \varepsilon\|v_i\|_{L^2(D)} + \varepsilon + \varepsilon\|v_k\|_{L^2(D)} \leq (2\gamma + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Die Folge $\{\mathcal{K}v_i\}$ ist also eine Cauchy-Folge in $L^2(D)$ und somit eine konvergente Teilfolge von $\{\mathcal{K}u_i\}$. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun ein fundamentales Resultat beweisen:

Satz 5.6 Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt.

Beweis. Zunächst ist ein Hilbert-Schmidt-Operator stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}v\|_{L^2(D)}^2 &= \int_D \left(\int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y})v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right)^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leq \|v\|_{L^2(D)}^2 \int_D \int_D k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \|v\|_{L^2(D)}^2 \|k\|_{L^2(D \times D)}^2.\end{aligned}$$

Nun sei $\{u_n\}$ eine Orthonormalbasis in $L^2(D)$. Da der Kern $k \in L^2(D \times D)$ erfüllt, folgt die Identität

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{y}) \quad \text{mit} \quad \alpha_{i,j} = \int_D \int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}.$$

Dabei ist die Folge der Koeffizienten $\{\alpha_{i,j}\}$ aus $\ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, dies bedeutet,

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{i,j}^2 < \infty.$$

Wegen

$$(\mathcal{K}u_k)(\mathbf{x}) = \int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} u_i(\mathbf{x}) \underbrace{\int_D u_j(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}_{=\delta_{j,k}} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{j,k} u_i(\mathbf{x})$$

folgt daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathcal{K}u_k\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{j,k}^2 < \infty,$$

dies bedeutet,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \|\mathcal{K}u_k\|_{L^2(D)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.2)$$

Es sei nun $\mathcal{K}_n : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ definiert durch

$$\mathcal{K}_n v = \sum_{k=1}^n (v, u_k)_{L^2(D)} \mathcal{K}u_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} (v, u_k)_{L^2(D)} \alpha_{j,k} u_j(\mathbf{x}).$$

Wegen $v = \sum_{i=1}^{\infty} (v, u_i)_{L^2(D)} u_i$ ist dann

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}v - \mathcal{K}_n v\|_{L^2(D)}^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (v, u_k)_{L^2(D)} \mathcal{K}u_k - \sum_{k=1}^n (v, u_k)_{L^2(D)} \mathcal{K}u_k \right\|_{L^2(D)}^2 \\
&= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (v, u_k)_{L^2(D)} \mathcal{K}u_k \right\|_{L^2(D)}^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(v, u_k)_{L^2(D)}| \|\mathcal{K}u_k\|_{L^2(D)} \right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (v, u_k)_{L^2(D)}^2 \right) \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mathcal{K}u_k\|_{L^2(D)}^2 \right) \\
&\leq \|v\|_{L^2(D)}^2 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mathcal{K}u_k\|_{L^2(D)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (5.2) gilt also

$$\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mathcal{K}u_k\|_{L^2(D)}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Aus Lemma 5.5 folgt schließlich die Behauptung. \square

5.3 Singulärwertzerlegung

Wir beabsichtigen, eine Funktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(D_1 \times D_2)$ in der Form

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma_{\ell} \varphi_{\ell}(\mathbf{x}) \psi_{\ell}(\mathbf{y}) \quad (5.3)$$

mit gewissen Koeffizienten $\sigma_{\ell} \in \mathbb{R}$ und Funktionen $\varphi_{\ell} \in L^2(D_1)$, $\psi_{\ell} \in L^2(D_2)$ darzustellen, das heißt, die Variablen $\mathbf{x} \in D_1$ und $\mathbf{y} \in D_2$ zu trennen. Dies geschieht mithilfe der *Singulärwertzerlegung* des Integraloperators

$$\mathcal{S} : L^2(D_2) \rightarrow L^2(D_1), \quad (\mathcal{S}u)(\mathbf{x}) = \int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Der zu \mathcal{S} adjungierte Operator lautet

$$\mathcal{S}^* : L^2(D_1) \rightarrow L^2(D_2), \quad (\mathcal{S}^*u)(\mathbf{y}) = \int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Daher ist $\mathcal{S}\mathcal{S}^* : L^2(D_1) \rightarrow L^2(D_1)$ gerade gegeben durch

$$(\mathcal{S}\mathcal{S}^*u)(\mathbf{x}) = \left[\mathcal{S} \left(\int_{D_1} f(\mathbf{y}, \cdot) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \right](\mathbf{x}) = \int_{D_1} \underbrace{\left(\int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right)}_{=: k(\mathbf{x}, \mathbf{y})} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Um die Singulärwertzerlegung des Integraloperators \mathcal{S} und damit die Entwicklung (5.3) von $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(D_1 \times D_2)$ zu bestimmen, benötigen wir also die Eigenwerte des Operators

$$\mathcal{K} : L^2(D_1) \rightarrow L^2(D_1), \quad (\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = (\mathcal{S}\mathcal{S}^*u)(\mathbf{x}) = \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (5.4)$$

mit

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \, d\mathbf{z}. \quad (5.5)$$

Lemma 5.7 Es sei $f \in L^2(D_1 \times D_2)$. Dann ist der Integraloperator aus (5.4) und (5.5) ein kompakter und symmetrischer, positiv semidefiniter Operator $\mathcal{K} : L^2(D_1) \rightarrow L^2(D_1)$.

Beweis. Weil $k \in L^2(D_1 \times D_1)$ symmetrisch ist, ist der Integraloperator \mathcal{K} ein symmetrischer Hilbert-Schmidt-Operator. Weiterhin gilt für ein beliebiges $u \in L^2(D_1)$

$$\begin{aligned} \underbrace{(u, \mathcal{K}u)}_{=(u, \mathcal{S}\mathcal{S}^*u)} &= \int_{D_1} \int_{D_1} \int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z})u(\mathbf{x})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{z} \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{D_2} \underbrace{\left(\int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \left(\int_{D_1} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right)}_{(\mathcal{S}^*u, \mathcal{S}^*u)} \, d\mathbf{z} \\ &= \int_{D_2} \underbrace{\left(\int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right)^2}_{=\|\mathcal{S}^*u\|_{L^2(D_1)}^2} \, d\mathbf{z} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

dies bedeutet, \mathcal{K} ist auch positiv semidefinit. □

Gemäß Satz 5.3 besitzt der Operator \mathcal{K} eine Entwicklung in Eigenpaare

$$\mathcal{K}\varphi_\ell = \lambda_\ell\varphi_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

mit positive Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \rightarrow 0$ und Eigenfunktionen $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$, die eine Orthonormalbasis des Bildraums $\text{img}(\mathcal{K})$ bilden.

Wir können nun für alle $\ell \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\psi_\ell \in L^2(D_2)$ definieren durch

$$\psi_\ell(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}}(\mathcal{S}^*\varphi_\ell)(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (5.6)$$

Damit erhalten wir eine zweite Folge orthonormaler Funktionen, da

$$\begin{aligned}
\int_{D_2} \psi_k(\mathbf{z})\psi_\ell(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_\ell}} \underbrace{\int_{D_2} \left(\int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})\varphi_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \left(\int_{D_1} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})\varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{z}}_{=(\mathcal{S}^*\varphi_k, \mathcal{S}^*\varphi_\ell)_{L^2(D_2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_\ell}} \int_{D_1} \int_{D_1} \left(\int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right) \varphi_k(\mathbf{x})\varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_\ell}} \underbrace{\int_{D_1} \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi_k(\mathbf{x})\varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}}_{=(\mathcal{S}\mathcal{S}^*\varphi_k, \varphi_\ell)_{L^2(D_1)}} \\
&= \frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_\ell}} \int_{D_1} \varphi_k(\mathbf{x})\varphi_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \delta_{k,\ell}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})\psi_\ell(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}}_{=(\mathcal{S}\psi_\ell)(\mathbf{x})} &\stackrel{(5.6)}{=} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \underbrace{\int_{D_2} \int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z})\varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{z}}_{=(\mathcal{S}\mathcal{S}^*\varphi_\ell)(\mathbf{x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \int_{D_1} \left(\int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right) \varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
&= \sqrt{\lambda_\ell}\varphi_\ell(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

bekommen wir schließlich die Darstellung

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_\ell}\varphi_\ell(\mathbf{x})\psi_\ell(\mathbf{y}). \quad (5.7)$$

Bemerkung Den Kern $\tilde{k}(\cdot, \cdot)$ des Operators $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{S}^*\mathcal{S} : L^2(D_2) \rightarrow L^2(D_2)$ erhält man, indem man die Rollen von D_1 und D_2 vertauscht: man bekommt den Integraloperator

$$\tilde{\mathcal{K}} : L^2(D_2) \rightarrow L^2(D_2), \quad (\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = (\mathcal{S}^*\mathcal{S}u)(\mathbf{x}) = \int_{D_2} \tilde{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

mit der Kernfunktion

$$\tilde{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{D_1} f(\mathbf{z}, \mathbf{x})f(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{z} \in L^2(D_2 \times D_2).$$

Es existiert dann ebenso eine Zerlegung in Eigenpaare

$$\tilde{\mathcal{K}}\tilde{\varphi}_\ell = \tilde{\lambda}_\ell\tilde{\varphi}_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

mit nichtnegativen Eigenwerten $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_\ell \rightarrow 0$ und Eigenfunktionen $\{\tilde{\varphi}_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$. Analog zu (5.6) erhalten wir wiederum eine zweite Folge orthonormaler Funktionen $\{\tilde{\psi}_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in L^2(D_1)$. Die Funktionen $\{\tilde{\varphi}_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $\{\tilde{\psi}_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ sind die gleichen wie zuvor, nur dass nun die Variablen vertauscht sind, mit anderen Worten,

$$\varphi_\ell = \tilde{\psi}_\ell, \quad \psi_\ell = \tilde{\varphi}_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Außerdem stimmen die Eigenwerte λ_ℓ and $\tilde{\lambda}_\ell$ von \mathcal{K} und $\tilde{\mathcal{K}}$ überein. Letztendlich erhalten wir also dieselbe Darstellung (5.7) wie zuvor. \diamond

Satz 5.8 Die abgeschnittene Singulärwertzerlegung ist optimal in $L^2(D_1 \times D_2)$ in dem Sinne, dass für jede andere endliche M -term-Approximation

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \sum_{\ell=1}^M \sigma_\ell u_\ell(\mathbf{x}) v_\ell(\mathbf{y})$$

mit normierten Funktionen $\{u_\ell\}_{\ell=1}^M$ und $\{v_\ell\}_{\ell=1}^M$ gilt

$$\left\| f - \sum_{\ell=1}^M \sqrt{\lambda_\ell} (\varphi_\ell \otimes \psi_\ell) \right\|_{L^2(D_1 \times D_2)} \leq \left\| f - \sum_{\ell=1}^M \sigma_\ell (u_\ell \otimes v_\ell) \right\|_{L^2(D_1 \times D_2)}.$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge $\{u_\ell\}_{\ell=1}^M$ auch orthonormal ist. Ansonsten reorthogonalisieren wir diese Folge in

$$U_M := \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_M\},$$

was auf veränderte Koeffizienten σ_ℓ und Funktionen v_ℓ führt, aber der gleichen Approximationen entspricht.

Die $L^2(D_1)$ -Orthoprojektion von $f(\cdot, \mathbf{y})$ auf U_M ist gegeben durch

$$f_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\ell=1}^M \left(\int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) u_\ell(\mathbf{x}).$$

Da dies die Bestapproximation von $f(\cdot, \mathbf{y})$ in U_M bezüglich $L^2(D_1)$ ist,

$$f_M(\cdot, \mathbf{y}) = \operatorname{argmin}_{g \in U_M} \|f(\cdot, \mathbf{y}) - g\|_{L^2(D_1)},$$

folgt die Beziehung

$$v_\ell(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma_\ell} \int_{D_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (5.8)$$

für alle $\ell = 1, 2, \dots, M$.

Wir ergänzen nun die Folge $\{u_\ell\}_{\ell=1}^M$ zu einem vollständigen Orthonormalsystem $\{u_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ in $L^2(D_1)$. Bezüglich dieser Orthonormalbasis lässt sich f schreiben als

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma_\ell u_\ell(\mathbf{x}) v_\ell(\mathbf{y}), \quad (5.9)$$

wobei die Koeffizienten σ_ℓ und die Funktionen $v_\ell \in L^2(D_2)$ für alle $\ell > M$ ebenfalls durch (5.8) gegeben sind. Unsere ursprüngliche Approximation f_M erhalten wir hieraus wieder durch das Abschneiden nach M Termen.

Wir setzen nun

$$\epsilon_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=M+1}^{\infty} \sigma_k u_k(\mathbf{x}) v_k(\mathbf{y}).$$

Einsetzen von (5.8) in (5.9) liefert

$$\begin{aligned}
& \int_{D_2} \epsilon_M^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
&= \int_{D_2} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}) \int_{D_1} f(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{z}_1) \, d\mathbf{z}_1 \right) \left(\sum_{\ell=M+1}^{\infty} u_\ell(\mathbf{x}) \int_{D_1} f(\mathbf{z}_2, \mathbf{y}) u_\ell(\mathbf{z}_2) \, d\mathbf{z}_2 \right) \, d\mathbf{y} \\
&= \sum_{k, \ell=M+1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}) u_\ell(\mathbf{x}) \int_{D_1} \int_{D_1} \underbrace{\left(\int_{D_2} f(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}) f(\mathbf{z}_2, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right)}_{=k(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)} u_k(\mathbf{z}_1) u_\ell(\mathbf{z}_2) \, d\mathbf{z}_1 \, d\mathbf{z}_2 \\
&= \sum_{k, \ell=M+1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}) u_\ell(\mathbf{x}) \int_{D_1} \int_{D_1} k(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) u_k(\mathbf{z}_1) u_\ell(\mathbf{z}_2) \, d\mathbf{z}_1 \, d\mathbf{z}_2.
\end{aligned}$$

Integration bezüglich \mathbf{x} über D_1 ergibt wegen der Orthonormalität der u_ℓ die Identität

$$\|\epsilon_M\|_{L^2(D_1 \times D_2)}^2 = \int_{D_1} \int_{D_2} \epsilon_M^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \sum_{\ell=M+1}^{\infty} \int_{D_1} \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_\ell(\mathbf{x}) u_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}.$$

Das Problem lautet nun, $\|\epsilon_M\|_{L^2(D_1 \times D_2)}^2$ zu minimieren unter der Nebenbedingung, dass die $\{u_\ell\}$ orthonormal sind. Dies impliziert, dass für ein beliebiges $k > M$ die Funktion u_k das Sattelpunktproblem

$$\begin{aligned}
F(u_k, \lambda_k) &:= \sum_{\ell=M+1}^{\infty} \left\{ \int_{D_1} \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_\ell(\mathbf{x}) u_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} - \lambda_\ell \left(\int_{D_1} u_\ell^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - 1 \right) \right\} \\
&\longrightarrow \inf_{u_k \in L^2(D_1)} \sup_{\lambda_k \in \mathbb{R}}
\end{aligned}$$

lösen muss. Wegen

$$\begin{aligned}
F(u_k + tv, \lambda_k) &= F(u_k, \lambda_k) + 2t \left\{ \int_{D_1} \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} - \lambda_k \int_{D_1} u_k(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} \\
&\quad + t^2 \left\{ \int_{D_1} \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{x}) v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} - \lambda_k \int_{D_1} v^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\}
\end{aligned}$$

gilt für diese Lösung folglich

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} F(u_k + tv, \lambda_k) \right|_{t=0} = 2 \left\{ \int_{D_1} \int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} - \lambda_k \int_{D_1} u_k(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

für alle $v \in L^2(D_1)$. Dies ist äquivalent zur Gleichung

$$\int_{D_1} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \lambda_k u_k(\mathbf{x}).$$

Damit ist gezeigt, dass eine beliebige M -term-Approximation keinen geringeren Fehler in $L^2(D_1 \times D_2)$ besitzen kann als die abgeschnittene Singulärwertzerlegung. \square

5.4 Anwendung auf stochastische Felder

Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $\Sigma = \mathcal{B}_\Omega^m$. Eine Funktion $f \in L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ besitzt den Erwartungswert

$$\mathbb{E}_f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega) dP(\omega) \in L^2(D)$$

und die Kovarianz

$$\text{Cov}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}, \omega) - \mathbb{E}_f(\mathbf{x}))(f(\mathbf{y}, \omega) - \mathbb{E}_f(\mathbf{y})) dP(\omega) \in L^2(D \times D).$$

Wenden wir nun das Ergebnis des vorigen Abschnitts auf die Funktion $f(\mathbf{x}, \omega) - \mathbb{E}_f(\mathbf{x})$ an, so folgt die Darstellung

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{E}_f(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \psi_\ell(\omega), \quad (5.10)$$

wobei $(\lambda_\ell, \varphi_\ell)$ gerade die Eigenpaare des folgenden Integraloperators

$$\mathcal{C}\varphi_\ell = \int_D \text{Cov}_f(\cdot, \mathbf{y}) \varphi_\ell(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \stackrel{!}{=} \lambda_\ell \varphi_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (5.11)$$

sind. Wir wollen dabei stets annehmen, dass die Folge $\{\lambda_\ell\}$ monoton fallend ist. Die Zufallsgrößen

$$\psi_\ell(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \int_D (f(\mathbf{x}, \omega) - \mathbb{E}_f(\mathbf{x})) \varphi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \in L_P^2(\Omega), \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (5.12)$$

sind zentriert,

$$\mathbb{E}(\psi_\ell(\omega)) = \int_{\Omega} \psi_\ell(\omega) dP(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \int_D \underbrace{\int_{\Omega} (f(\mathbf{x}, \omega) - \mathbb{E}_f(\mathbf{x})) dP(\omega)}_{=0} \varphi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

und nach Konstruktion unkorreliert,

$$\int_{\Omega} \psi_k(\omega) \psi_\ell(\omega) dP(\Omega) = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{N}.$$

Definition 5.9 Die Entwicklung (5.10) mit (5.11) und (5.12) einer Funktion $f \in L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ heißt **Karhunen-Loève-Entwicklung**.

Um zu numerisch handhabbaren Verfahren zu kommen, wird die Reihe in (5.10) nach N Termen abgeschnitten und $f(\mathbf{x}, \omega)$ durch die Approximation

$$f(\mathbf{x}, \omega) \approx f_N(\mathbf{x}, \omega) := \mathbb{E}_f(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \psi_\ell(\omega)$$

ersetzt. Durch diese Approximation haben wir folglich Orts- und stochastische Variable getrennt. Der dabei auftretende Fehler ist dann gerade

$$\epsilon_N = \|f - f_N\|_{L^2(D) \otimes L^2_P(\Omega)} = \sqrt{\sum_{\ell=N+1}^{\infty} \lambda_\ell}.$$

Um allerdings eine stochastische Diskretisierung durchführen zu können, genügt es im allgemeinen nicht, dass die Zufallsgrößen $\{\psi_\ell(\omega)\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ unkorreliert sind, sondern sie müssen als unabhängig vorausgesetzt werden. Weiterhin muss für das weitere Vorgehen auch eine zugehörige Dichte existieren und explizit bekannt sein:

Annahme. Die Zufallsgrößen $\{\psi_\ell(\omega)\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ aus (5.10) sind unabhängig und besitzen jeweils die bekannte Dichte $\rho_\ell : I_\ell \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkungen

1. In der Praxis kennt man meist die Funktion $f(\mathbf{x}, \omega)$ nicht. Für die stochastische Modellierung gibt man sich daher eine gewünschte Kovarianzfunktion $\text{Cov}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(D \times D)$ vor und nimmt die $\{\psi_\ell(\omega)\}_{\ell=1}^N$ alle unabhängig und identisch verteilt mit bekannter Verteilung an. Dieses Vorgehen schränkt allerdings die Menge der modellierbaren stochastischen Felder $f(\mathbf{x}, \omega)$ ein.
2. Bei einem *Gaußschen Prozess* ist das Martingal $F_{\mathbf{x}}(\omega) := f(\mathbf{x}, \omega)$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ -verteilt. In diesem Fall sind die Zufallsgrößen $\{\psi_\ell(\omega)\}_{\ell=1}^N$ ebenfalls normalverteilt. Nach Konstruktion gilt $\mathbb{E}(\psi_\ell(\omega)) = 0$ und $\mathbb{V}(\psi_\ell(\omega)) = 1$, also

$$\psi_\ell \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{für alle } \ell = 1, 2, \dots$$

Da im Falle der Normalverteilung die Unkorreliertheit auch die Unabhängigkeit impliziert, begeht man hier keinen Modellierungsfehler.

◇

5.5 Numerische Behandlung stochastischer Diffusionskoeffizienten

Wir wollen nun das allgemeine Vorgehen im Fall einer partiellen Differentialgleichung mit stochastischem Diffusionskoeffizienten $\alpha \in L^\infty(D \times \Omega)$ beschreiben. Gesucht sei also $u \in H_0^1(D) \otimes L^2_P(\Omega)$ mit

$$\left. \begin{aligned} -\text{div}_{\mathbf{x}}(\alpha(\omega)\nabla_{\mathbf{x}}u(\omega)) &= f \quad \text{in } D \\ u(\omega) &= 0 \quad \text{auf } \partial D \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega. \quad (5.13)$$

Bekannt seien Erwartungswert

$$0 < \underline{\alpha} \leq \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha} < \infty \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D,$$

und Kovarianz $\text{Cov}_\alpha \in L^\infty(D \times D)$ des Koeffizienten. Mit Hilfe der Karhunen-Löve-Entwicklung lässt sich der Koeffizient schreiben als

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) := \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \xi_\ell(\omega), \quad (5.14)$$

wobei $\xi_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unkorrelierte Zufallsgrößen mit Dichte ρ darstellen und $(\lambda_\ell, \varphi_\ell)$ die Eigenpaare zum Integraloperator

$$\mathcal{C}\varphi_\ell = \int_D \text{Cov}_\alpha(\cdot, \mathbf{y})\varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \lambda_\ell\varphi_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (5.15)$$

sind. Die stochastischen Fluktuationen müssen klein genug sein, damit

$$0 < \underline{\beta} \leq \alpha(\mathbf{x}, \omega) \leq \bar{\beta} < \infty \quad \text{für alle } (\mathbf{x}, \omega) \in D \times \Omega,$$

gewährleistet ist.

Wir wollen im folgenden annehmen, dass die Zufallsgrößen $\{\xi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ sogar alle unabhängig und identisch verteilt seien mit $\text{img}(\xi_\ell) = I$, wobei das Intervall I beschränkt sei und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $I = (-1, 1)$ gelte. Ferner bezeichne $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige Dichtefunktion, die wegen $\mathbb{E}(\xi_\ell(\omega)) = 0$ der Gleichung

$$\int_I \xi \rho(\xi) \, d\xi = 0$$

genügen muss.

Zur numerischen Approximation berechnet man nun die ersten N Eigenpaare $(\lambda_\ell, \varphi_\ell)$ aus (5.15) und approximiert

$$\alpha_N(\mathbf{x}, \omega) := \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \xi_\ell(\omega). \quad (5.16)$$

Hierbei ist der Index N so zu wählen, dass der Fehler bezüglich der $L^\infty(D \times \Omega)$ -Norm hinreichend klein ist. Anschließend löst man

$$\left. \begin{aligned} -\text{div}_{\mathbf{x}}(\alpha_N(\omega) \nabla_{\mathbf{x}} u_N(\omega)) &= f \quad \text{in } D \\ u_N(\omega) &= 0 \quad \text{auf } \partial D \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega. \quad (5.17)$$

recht ähnlich zu Beispiel 4.11.

Zunächst führen wir eine Galerkin-Diskretisierung in der stochastischen Variablen $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{I} := (-1, 1)^N$ durch. Dazu definieren wir die Produktdichte $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) := \prod_{i=1}^N \rho(\xi_i)$ und suchen $u_N \in H_0^1(D) \otimes [\Pi_M(-1, 1)]^N$, so dass

$$-\int_{\mathbf{I}} \text{div}_{\mathbf{x}}(\alpha_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \nabla_{\mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) Q(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} = f(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{I}} Q(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \quad (5.18)$$

für alle $Q \in [\Pi_M(-1, 1)]^N$. Nun konstruieren wir geeignete Basispolynome $\{P_i\}_{i=0}^M$ mithilfe des folgenden Variationsproblem:

suche $(P, \theta) \in \Pi_M(-1, 1) \times \mathbb{R}$,

$$\text{so dass } \int_{-1}^1 t P(t) Q(t) \rho(t) \, dt = \theta \int_{-1}^1 P(t) Q(t) \rho(t) \, dt \quad \text{für alle } Q \in \Pi_M(-1, 1).$$

Unter Verwendung der Legendre-Polynome $\{L_i\}_{i=0}^M$ folgt, dass wir $P := \sum_{i=0}^M p_i L_i \in \Pi_M(-1, 1)$ und $\theta \in \mathbb{R}$ suchen, so dass

$$\sum_{i=0}^M p_i \int_{-1}^1 t L_i(t) L_j(t) \rho(t) \, dt = \theta \sum_{i=0}^M p_i \int_{-1}^1 L_i(t) L_j(t) \rho(t) \, dt, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Dies ist äquivalent zum verallgemeinerten diskreten Eigenwertproblem $\mathbf{S}\mathbf{p} = \theta\mathbf{D}\mathbf{p}$, wobei $\mathbf{S} = [s_{i,j}]_{i,j=0}^M$ und $\mathbf{D} = [d_{i,j}]_{i,j=0}^M$ mit

$$s_{i,j} = \int_{-1}^1 tL_i(t)L_j(t)\rho(t) dt, \quad d_{i,j} = \int_{-1}^1 L_i(t)L_j(t)\rho(t) dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, M.$$

Im Gegensatz zu Beispiel 4.11 ist \mathbf{D} generell keine Diagonalmatrix mehr, sondern eine symmetrische, positiv definite Matrix. Mithilfe der Cholesky-Zerlegung $\mathbf{D} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ kann man jedoch das verallgemeinerte Eigenwertproblem überführen in ein gewöhnliches:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{L}^{-T}\mathbf{q} = \theta\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{p}.$$

Die $M + 1$ Eigenvektoren $\{\mathbf{q}_i\}_{i=0}^M$ sind paarweise orthogonal und für $P_i = \sum_{j=0}^M p_j L_j$ gilt

$$\int_{-1}^1 P_i(t)P_j(t)\rho(t) dt = \delta_{i,j}, \quad \int_{-1}^1 tP_i(t)P_j(t)\rho(t) dt = \theta_i\delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Daher liefert der Separationsansatz

$$u_N(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{\|\boldsymbol{\mu}\|_\infty \leq M} v_\mu(\mathbf{x})P_\mu(\boldsymbol{\xi}(\omega)), \quad \text{wobei } P_\mu(\boldsymbol{\xi}(\omega)) = \prod_{i=1}^N P_{\mu_i}(\xi_i(\omega)) \in [\Pi_M(-1, 1)]^N,$$

eingesetzt in (5.18) schließlich ein vollständig entkoppeltes System von $(M+1)^N$ partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\|\boldsymbol{\mu}\|_\infty \leq M} \int_{\mathbf{I}} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\left[\mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\mathbf{x}) \xi_i \right] \nabla_{\mathbf{x}} v_\mu(\mathbf{x}) P_\mu(\boldsymbol{\xi}) \right) P_\nu(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ & = - \sum_{\|\boldsymbol{\mu}\|_\infty \leq M} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\left[\mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) \underbrace{\int_{\mathbf{I}} P_\mu(\boldsymbol{\xi}) P_\nu(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}_{=\delta_{\mu,\nu}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\mathbf{x}) \underbrace{\int_{\mathbf{I}} \xi_i P_\mu(\boldsymbol{\xi}) P_\nu(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}_{=\theta_{\mu_i} \delta_{\mu,\nu}} \right] \nabla_{\mathbf{x}} v_\mu(\mathbf{x}) \right) \\ & = - \operatorname{div} \left(\left[\mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\mathbf{x}) \theta_{\mu_i} \right] \nabla v_\nu(\mathbf{x}) \right) \stackrel{!}{=} f(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{I}} P_\nu(\boldsymbol{\xi}) \rho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

für alle $\|\boldsymbol{\nu}\|_\infty \leq M$.

5.6 Abklingverhalten der Eigenwerte

Entscheidend für die Konvergenz der Approximation (5.16) ist das Abklingverhalten der Koeffizienten $\{\lambda_\ell\}$. Wir benötigen folgenden Satz.

Satz 5.10 (Min-Max-Prinzip von Courant-Fischer) Sei $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ein kompakter, symmetrischer und positiv semidefiniter Operator mit den Eigenwerten

$$\infty > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0.$$

Dann gilt für eine beliebige Orthonormalbasis $\{w_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ aus $L^2(D)$, dass

(i)

$$\min_{0 \neq u \in \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}} \frac{(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \leq \lambda_n$$

(ii)

$$\max_{0 \neq u \perp \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}} \frac{(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)}}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \geq \lambda_{n+1}$$

Ferner gilt Gleichheit in (i) und (ii), wenn $\{w_\ell\}_{\ell=1}^n$ die entsprechenden Eigenfunktionen $\{v_\ell\}_{\ell=1}^n$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_\ell\}_{\ell=1}^n$ von \mathcal{K} sind.

Beweis. Sei $\{v_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ die Eigenbasis zu \mathcal{K} . Für $u = \sum_{i=1}^\infty \xi_i v_i$ folgt

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i |\xi_i|^2 \quad \text{und} \quad \|u\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^2.$$

Wähle

$$0 \neq u = \sum_{i=n}^\infty \xi_i v_i \in V_{n-1}^\perp := \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}^\perp,$$

so dass die zusätzliche Forderung $u \in W_n := \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ erfüllt ist. Dies ist möglich, da aus Dimensionsgründen folgt $\dim(V_{n-1}^\perp \cap W_n) \geq 1$. Für ein solches u gilt dann

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} = \sum_{i=n}^\infty \lambda_i |\xi_i|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=n}^\infty |\xi_i|^2 = \lambda_n \|u\|_{L^2(D)}^2,$$

das ist (i). Ist hingegen $W_n = V_n = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dann kann jedes $u \in W_n$ dargestellt werden vermittels $u = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$. Daher folgt

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi_i|^2 \geq \lambda_n \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 = \lambda_n \|u\|_{L^2(D)}^2,$$

was wegen dem zuvor bewiesenen in diesem Fall sogar die Gleichheit in (i) impliziert.

Um (ii) zu zeigen, wählen wir ein

$$0 \neq u = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \in V_n = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

so dass $u \perp W_{n-1} = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$. Ein solches u existiert ebenfalls, da gilt $\dim(V_n \cap W_{n-1}^\perp) \geq 1$. Wegen

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi_i|^2 \geq \lambda_n \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 = \lambda_n \|u\|_{L^2(D)}^2$$

folgt Aussage (ii). Im Fall $W_{n-1} = V_{n-1} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ kann jedes $u \perp W_{n-1}$ geschrieben werden als $u = \sum_{i=n}^{\infty} \xi_i v_i$, woraus wegen

$$(u, \mathcal{K}u)_{L^2(D)} = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i |\xi_i|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=n}^{\infty} |\xi_i|^2 = \lambda_n \|u\|_{L^2(D)}^2$$

sogar die Gleichheit in (ii) folgt. □

Korollar 5.11 Sei $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ein kompakter, symmetrischer und positiv semi-definiter Operator mit den Eigenpaaren (λ_i, φ_i) . Ist

$$\mathcal{K}_n : L^2(D) \rightarrow L^2(D), \quad \mathcal{K}_n u = \sum_{i=1}^n (\psi_i, u)_{L^2(D)} \mathcal{K} \psi_i$$

irgendeine (symmetrische) Rang- n -Approximation an den Operator \mathcal{K} , dann gilt

$$\lambda_{n+1} \leq \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\|.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Min-Max-Prinzip von Courant-Fischer:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \min_{\substack{V \subset L^2(D) \\ \dim V^\perp \leq n}} \max_{\substack{u \in V \\ \|u\|_{L^2(D)}=1}} (\mathcal{K}u, u)_{L^2(D)} \\ &\leq \max_{\substack{u \perp \text{img } \mathcal{K}_n \\ \|u\|_{L^2(D)}=1}} (\mathcal{K}u, u)_{L^2(D)} \\ &= \max_{\substack{u \perp \text{img } \mathcal{K}_n \\ \|u\|_{L^2(D)}=1}} ((\mathcal{K} - \mathcal{K}_n)u, u)_{L^2(D)} \\ &\leq \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\|. \end{aligned}$$

□

Wir benötigen folgendes Approximationsresultat, welches besagt, dass eine analytische Funktion exponentiell durch stückweise polynomiale Funktionen approximiert werden kann.

Lemma 5.12 Zu jeder analytischen Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert ein Index $j \in \mathbb{N}$, so dass f auf jedem Intervall $I_{j,k} := 2^{-j}[k, k+1] \subset [0, 1]$, $0 \leq k < 2^j$, exponentiell durch Polynome approximiert werden kann. Mit anderen Worten, es existieren Konstanten $a, b > 0$, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, die auf jedem Intervall $I_{j,k}$ mit einem Polynom vom Grad n übereinstimmt und der Fehlerabschätzung

$$\|f - f_n\|_{L^\infty([0,1])} \leq a \exp(-bn)$$

genügt.

Beweis. Ist f eine analytische Funktion, dann kann f in jedem Punkt $x_0 \in [0, 1]$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m, \quad |x - x_0| < r(x_0),$$

mit dem Konvergenzradius

$$\frac{1}{r(x_0)} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}} > 0.$$

Da der Konvergenzradius eine in x_0 stetige Funktion ist, existiert folglich eine Konstante $c_f > 0$, so dass

$$\|f^{(m)}\|_{L^\infty([0,1])} \leq c_f \frac{m!}{R^m}, \quad R := \min_{x \in [0,1]} r(x) > 0.$$

Wir wählen nun $j \in \mathbb{N}_0$ so, dass $2^{-j} \leq R$. Für ein gegebenes $0 \leq k < 2^j$ setzen wir nun für alle $x \in I_{j,k}$

$$f_n(x) := \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \in \Pi_n(I_{j,k}),$$

wobei

$$x_0 := 2^{-j} \frac{2k+1}{2} \in I_{j,k}$$

der Mittelpunkt dieses Intervalls $I_{j,k}$ sei. Aus

$$\|f - f_n\|_{L^\infty(I_{j,k})} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty(I_{j,k})}}{(n+1)!} 2^{-(j+1)(n+1)} \leq c_f \frac{(R/2)^{n+1}}{R^{n+1}} \leq c_f 2^{-(n+1)}$$

folgt die Behauptung

$$\|f - f_n\|_{L^\infty([0,1])} \leq \max_{0 \leq k < 2^j} \|f - f_n\|_{L^\infty(I_{j,k})} \leq c_f 2^{-(n+1)}.$$

□

Bemerkungen

1. Mit etwas mehr Aufwand zeigt man das entsprechende Resultat in \mathbb{R}^d . Dazu bezeichne $\square := [0, 1]^d$ den Einheitswürfel im \mathbb{R}^d und

$$\square_{j,\mathbf{k}} := I_{j,k_1} \times I_{j,k_2} \cdots \times I_{j,k_d} \subset \square, \quad 0 \leq k_1, \dots, k_d < 2^j,$$

einen Würfel der Kantenlänge 2^{-j} . Zu jeder analytischen Funktion $f : \square \rightarrow \mathbb{R}$ existiert dann ein Index $j \in \mathbb{N}$, so dass f in jedem Würfel $\square_{j,\mathbf{k}}$ exponentiell durch Polynome approximiert werden kann. Folglich existieren Konstanten $a, b > 0$, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : \square \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n|_{\square_{j,\mathbf{k}}} \in \Pi_n(I_{j,k_1}) \otimes \Pi_n(I_{j,k_2}) \otimes \cdots \otimes \Pi_n(I_{j,k_d})$$

existiert mit

$$\|f - f_n\|_{L^\infty(\square)} \leq a \exp(-bn).$$

2. Sei D ein beliebiges, beschränktes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$ und f analytisch auf \overline{D} . Dann erhält man die Approximationsaussage

$$\|f - f_n\|_{L^\infty(\overline{D})} \leq a \exp(-bn),$$

indem man D in einen Würfel packt und f analytisch darauf fortsetzt.

3. Der Raum $\Pi_n(I_{j,k_1}) \otimes \Pi_n(I_{j,k_2}) \otimes \cdots \otimes \Pi_n(I_{j,k_d})$ der Tensorproduktpolynome auf $\square_{j,\mathbf{k}}$ enthält $(n+1)^d$ Basisfunktionen und insgesamt sind nur $\mathcal{O}(2^{jd})$ Würfel $\square_{j,\mathbf{k}}$ vorhanden. Folglich haben wir gezeigt, dass man eine analytische $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Funktion f_N aus N Freiheitsgraden mit exponentieller Rate approximieren kann:

$$\|f - f_N\|_{L^\infty(\overline{D})} \leq a \exp(-bN^{1/d}). \quad (5.19)$$

◇

Satz 5.13 Sei $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ein kompakter, symmetrischer und positiv semidefinierter Integraloperator mit Kern $k \in L^2(D \times D)$. Ist der Kern analytisch auf $\overline{D} \times \overline{D}$, dann klingen die Eigenwerte $\{\lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ exponentiell ab. Genauer gibt es Konstanten $a, b > 0$, so dass gilt

$$\lambda_\ell \leq a \exp(-b\ell^{1/d}), \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Da der Kern analytisch ist, können wir ihn auf $\overline{D} \times \overline{D}$ als Taylor-Reihe darstellen

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha, \beta} k_{\alpha, \beta} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)^\beta, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_\infty < R.$$

Die Koeffizienten genügen dabei der Abschätzung

$$|k_{\alpha, \beta}| \leq \frac{c_k}{R^{|\alpha|+|\beta|}}.$$

Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges $u \in L^2(D)$ die Funktion

$$v(\mathbf{x}) = (\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = \int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

ebenfalls analytisch ist mit demselben Konvergenzradius:

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} v_{\alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty < R.$$

Dies zeigen wir, indem wir die Abschätzung

$$|v_{\alpha}| \leq \frac{c_{\mathcal{K}}}{R^{|\alpha|}} \|u\|_{L^2(D)} \quad (5.20)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ nachweisen.

Wir wählen ein $j \in \mathbb{N}$ wieder so groß, dass gilt $2^{-j} \leq R$. Für $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ bezeichne $\mathbf{y}_{\mathbf{k}}$ den Mittelpunkt des Würfels $\square_{j,\mathbf{k}} \subset \mathbb{R}^d$. Für jedes $\mathbf{x}_0 \in D$ und alle $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty < R$ folgt dann

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) &= \int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\square_{j,\mathbf{k}} \cap D} \sum_{\alpha, \beta} k_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathbf{k}})^\beta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \sum_{\alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \underbrace{\sum_{\beta} k_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\square_{j,\mathbf{k}} \cap D} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathbf{k}})^\beta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}_{=: v_\alpha}, \end{aligned}$$

vorausgesetzt es gilt wirklich (5.20). Dies sieht man aber wie folgt ein. Zunächst gilt für alle $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ mit $\square_{j,\mathbf{k}} \cap D \neq \emptyset$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\square_{j,\mathbf{k}} \cap D} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathbf{k}})^\beta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| &\leq \left(\int_{\square_{j,\mathbf{k}} \cap D} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathbf{k}})^{2\beta} \, d\mathbf{y} \right)^{1/2} \|u\|_{L^2(\square_{j,\mathbf{k}} \cap D)} \\ &\leq (R/2)^{|\beta|} R^{d/2} \|u\|_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Für alle anderen \mathbf{k} ist dieses Integral 0. Weil D nur $\mathcal{O}(2^{jd})$ Würfel schneidet, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} k_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}) \int_{\square_{j,\mathbf{k}} \cap D} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathbf{k}})^\beta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| &\leq c_D 2^{jd} \frac{c_{\mathbf{k}}}{R^{|\alpha|+|\beta|}} (R/2)^{|\beta|} R^{d/2} \|u\|_{L^2(D)} \\ &= \frac{c_{\mathcal{K}}}{R^{|\alpha|2^{|\beta|}}} \|u\|_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} |v_\alpha| &= \left| \sum_{\beta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} k_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}) \int_{\square_{j,\mathbf{k}} \cap D} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathbf{k}})^\beta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \sum_{\beta} \frac{c_{\mathcal{K}}}{R^{|\alpha|2^{|\beta|}}} \|u\|_{L^2(D)} \\ &\leq c_d \frac{c_{\mathcal{K}}}{R^{|\alpha|}} \|u\|_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $v = \mathcal{K}u$ analytisch, wobei der Konvergenzradius der Taylor-Reihe ebenfalls R und somit unabhängig von u ist.

In Lemma 5.12 haben wir gesehen, dass sich eine analytische Funktion exponentiell durch stückweise Polynome approximieren lässt. Gemäß (5.19) erhält man in $L^2(D)$ mit N Freiheitsgraden die Rate

$$\|f - f_N\|_{L^2(D)} \leq a \exp(-bN^{1/d}),$$

wobei die Konstanten nur vom Konvergenzradius und vom Gebiet abhängen. Sei Π_N die Orthoprojektion auf diesen N -dimensionalen Raum, dann ist $\Pi_N \mathcal{K}$ eine Rang- N -Approximation und gemäß Korollar 5.11 und dem soeben bewiesenen folgt

$$\lambda_{N+1} \leq \|\mathcal{K} - \Pi_N \mathcal{K}\| = \sup_{\|u\|_{L^2(D)}=1} \|\mathcal{K}u - \Pi_N \mathcal{K}u\|_{L^2(D)} \leq a \exp(-bN^{1/d}).$$

□

Bemerkungen

1. Um das obige Ergebnis zu zeigen, genügt es sogar einen im folgenden Sinne stückweise analytischen Kern $k \in L^2(D \times D)$ vorauszusetzen: der Kern muss analytisch auf allen Produktmengen $\overline{D}_i \times \overline{D}_j$ sein, wobei $\{D_i\}_{i=1}^M$ eine überlappungsfreie Zerlegung von D sei:

$$\bigcup_{i=1}^M \overline{D}_i = \overline{D} \quad \text{und} \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

2. Im Falle endlicher Glattheit kann nur algebraisches Abklingen der Eigenwerte gezeigt werden, das heißt, $\lambda_\ell \leq c \ell^{-p/d}$, wobei p der Sobolev-Glattheit entspricht. Ist der Kern beliebig glatt, aber nicht analytisch, dann ergibt sich ein supralgebraisches Abklingen: für jedes beliebige $s > 0$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\lambda_\ell \leq c \ell^{-s}, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Diese Aussagen gelten ebenso auch im Fall stückweiser (im obigen Sinne) Glattheit. \diamond

5.7 Abschneidefehler

Wir können nun den folgenden Satz beweisen, der den Fehler einer abgeschnittenen Karhunen-Löve-Entwicklung im Raum $L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ abschätzt.

Satz 5.14 Sei $\alpha \in L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ mit einer auf $\overline{D \times D}$ analytischen Kovarianz $\text{Cov}_\alpha \in L^2(D \times D)$. Dann genügt die abgeschnittene Karhunen-Löve-Entwicklung

$$\alpha_N(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \psi_\ell(\omega)$$

der Fehlerabschätzung

$$\|\alpha - \alpha_N\|_{L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \leq a \exp(-bN^{1/d}),$$

wobei $a, b > 0$ von N unabhängige Konstanten sind.

Beweis. Da die Kovarianz analytisch ist, folgt für die Eigenwerte des Integraloperators

$$\mathcal{K}u = \int_D \text{Cov}_\alpha(\cdot, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

aufgrund von Satz 5.13 $\lambda_\ell \leq a \exp(-b\ell^{1/d})$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
\|\alpha - \alpha_N\|_{L^2(D) \otimes L^2_P(\Omega)}^2 &= \left\| \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_\ell} (\varphi_\ell \otimes \psi_\ell) \right\|_{L^2(D) \otimes L^2_P(\Omega)}^2 \\
&= \sum_{\ell=N}^{\infty} \lambda_\ell \\
&\leq a \sum_{\ell=N}^{\infty} \exp(-b\ell^{1/d}) \\
&\leq a \int_N^{\infty} \exp(-bs^{1/d}) ds \\
&= ad \int_{\sqrt[d]{N}}^{\infty} t^{d-1} \exp(-bt) dt.
\end{aligned}$$

Da der Faktor $x^{d-1}/\exp(cx)$ für beliebiges $c > 0$ im Unendlichen verschwindet, folgt mit einer Konstanten $c < b$ die Behauptung:

$$\|\alpha - \alpha_N\|_{L^2(D) \otimes L^2_P(\Omega)}^2 \leq ad \int_{\sqrt[d]{N}}^{\infty} \exp(-ct) dt \leq \frac{ad}{c} \exp(-cN^{1/d}).$$

□

Für die numerische Behandlung stochastischer Diffusionskoeffizienten müssen wir den Fehler $\|\alpha - \alpha_N\|_{L^\infty(D \times \Omega)}$ untersuchen. Dazu brauchen wir eine Abschätzung der Eigenfunktionen $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ bezüglich der $L^\infty(D)$ -Norm. Um diese berechnen zu können, müssen wir folgendes Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis zur Verfügung stellen.

Lemma 5.15 (Ehrling) Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und $t > 0$. Dann existiert eine Konstante $c_E > 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, für alle $0 \leq s < t$ und für alle $u \in H^t(D)$ gilt

$$\|u\|_{H^s(D)} \leq \varepsilon \|u\|_{H^t(D)} + c_E \varepsilon^{s/(s-t)} \|u\|_{L^2(D)}, \quad \|u\|_{H^s(D)} := \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(D)}.$$

Satz 5.16 Sei $\mathcal{K} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ein kompakter, symmetrischer und positiv semidefiniter Integraloperator mit Kern $k \in L^2(D \times D)$ und Eigenwerten $\{\lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $L^2(D)$ -normierten Eigenfunktionen $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$. Ist der Kern analytisch auf $\overline{D} \times \overline{D}$, dann genügen die Eigenfunktionen für eine beliebiges $s > 0$ der Abschätzung

$$\|\partial^\alpha \varphi_\ell\|_{L^\infty(D)} \leq \frac{c_\alpha}{\lambda_\ell^s}, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\max_{\ell \in \mathbb{N}} \lambda_\ell \leq 1$ gilt. Da der Kern analytisch ist, folgt durch Differentiation der Eigenwertgleichung $\lambda_\ell \varphi_\ell =$

$\mathcal{K}\varphi_\ell$ für beliebige Ableitungen die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \varphi_\ell\|_{L^2(D)} &= \frac{1}{\lambda_\ell} \|\partial^\alpha \mathcal{K}\varphi_\ell\|_{L^2(D)} \\
&= \frac{1}{\lambda_\ell} \left\| \int_D \partial_{\mathbf{x}}^\alpha k(\cdot, \mathbf{y}) \varphi_\ell(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right\|_{L^2(D)} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_\ell} \|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha k(\cdot, \cdot)\|_{L^2(D \times D)} \|\varphi_\ell\|_{L^2(D)} \\
&= \frac{c_\alpha}{\lambda_\ell} \|\varphi_\ell\|_{L^2(D)} \\
&= \frac{c_\alpha}{\lambda_\ell},
\end{aligned}$$

wobei die Konstante c_α unabhängig von $\ell \in \mathbb{N}$ ist. Wir setzen $\varepsilon_0 := 1$ und wenden das Ehrlingsche Lemma für $\varepsilon = \lambda_\ell \leq \varepsilon_0$ an:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\ell\|_{H^s(D)} &\leq \lambda_\ell \|\varphi_\ell\|_{H^t(D)} + c_E \lambda_\ell^{s/(s-t)} \|\varphi_\ell\|_{L^2(D)} \\
&= \lambda_\ell \sum_{|\alpha|=t} \underbrace{\|\partial^\alpha \varphi_\ell\|_{L^2(D)}}_{\leq c_\alpha/\lambda_\ell} + c_E \lambda_\ell^{s/(s-t)} \underbrace{\|\varphi_\ell\|_{L^2(D)}}_{=1} \\
&\leq \lambda_\ell \sum_{|\alpha|=t} \frac{c_\alpha}{\lambda_\ell} + c_E \lambda_\ell^{s/(s-t)} \\
&\leq c_t \lambda_\ell^{s/(s-t)}.
\end{aligned}$$

Die Konstante c_t ist abhängig von t , aber unabhängig von $\ell \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s < t$.

Nun benutzen wir den Sobolevschen Einbettungssatz: im \mathbb{R}^d sind Funktionen aus dem $H^m(D)$ mit $m > d/2$ stetig. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \varphi_\ell\|_{L^\infty(D)} &\leq c_S \|\varphi_\ell\|_{H^m(D)} \leq c_S \sum_{s=0}^m \|\varphi_\ell\|_{H^s(D)} \leq c_S c_t \sum_{s=0}^m \lambda_\ell^{s/(s-t)} \leq c_S c_t \sum_{s=0}^m \lambda_\ell^{s/(m-t)} \\
&\leq c_S c_t c_m \lambda_\ell^{m/(m-t)}.
\end{aligned}$$

Abschließend wählt man t genügend groß, damit $m/(t-m) < s$ gilt. \square

Satz 5.17 Sei

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \psi_\ell(\omega)$$

mit einer auf $\overline{D \times D}$ analytischen Kovarianz $\text{Cov}_\alpha \in L^2(D \times D)$ und gleichmäßig beschränkten Zufallsgrößen $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$, das heißt, es gelte

$$\|\psi_\ell\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \quad \text{für alle } \ell = 1, 2, \dots$$

Dann genügt die abgeschnittene Karhunen-Löve-Entwicklung

$$\alpha_N(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \psi_\ell(\omega)$$

der Fehlerabschätzung

$$\|\alpha - \alpha_N\|_{L^\infty(D \times \Omega)} \leq a \exp(-bN^{1/d}),$$

wobei $a, b > 0$ von N unabhängige Konstanten sind.

Beweis. Aufgrund der Abschätzungen für die Eigenwerte (Satz 5.13) und der Eigenfunktionen (Satz 5.16) folgt

$$\begin{aligned} \|\alpha - \alpha_N\|_{L^\infty(D \times \Omega)} &= \left\| \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_\ell} (\varphi_\ell \otimes \psi_\ell) \right\|_{L^\infty(D \times \Omega)} \\ &= \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_\ell} \underbrace{\|\varphi_\ell\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\leq c\lambda_\ell^{-s}} \underbrace{\|\psi_\ell\|_{L^\infty(D)}}_{\leq c} \\ &\leq c \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \lambda_\ell^{1/2-s} \\ &\leq ac \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \exp(-b(1/2 - s)\ell^{1/d}). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich ganz ähnlich wie im Beweis von Satz 5.14 die Behauptung. \square

5.8 Lemma von Strang

Wenn wir einen stochastischen Diffusionskoeffizienten oder auch einen stochastischen Lastvektor durch eine abgeschnittene Karhunen-Loève-Entwicklung ersetzen, so hat dies einen Einfluss auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung. Um diesen Fehler abzuschätzen, benötigen wir das Lemma von Strang.

Das vorgegebene Variationsproblem

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

mit dem Hilbert-Raum V werde durch eine Folge von Approximationen ersetzt: gesucht wird ein $u_N \in V_N \subset V$ mit

$$a_N(u_N, v) = \ell_N(v) \quad \text{für alle } v \in V_N \tag{5.21}$$

Dabei sei die Bilinearform a_N stetig und gleichgradig elliptisch, das heißt, mit einer von $N \geq N_0$ unabhängigen Zahl $c_E > 0$ gelte

$$a_N(v, v) \geq c_E \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in V_N. \tag{5.22}$$

Lemma 5.18 (Strang) Unter den obigen Voraussetzungen ist mit einer von $N \geq N_0$ unabhängigen Zahl $c > 0$

$$\|u - u_N\| \leq c \left\{ \inf_{v_N \in V_N} \left[\|u - v_N\| + \sup_{w_N \in V_N} \frac{|a(v_N, w_N) - a_N(v_N, w_N)|}{\|w_N\|} \right] + \sup_{w_N \in V_N} \frac{|\ell(w_N) - \ell_N(w_N)|}{\|w_N\|} \right\}.$$

Beweis. Sei $v_N \in V_N$ und $u_N \in V_N$ die Lösung von (5.21), die wegen der Stetigkeit und Elliptizität der Bilinearform a_N auch existiert. Wir setzen zur Abkürzung $u_N - v_N = w_N$ und schließen aus der Stetigkeit der Bilinearform a zusammen mit (5.21) und (5.22)

$$\begin{aligned} c_E \|u_N - v_N\|^2 &\leq a_N(u_N - v_N, u_N - v_N) \\ &= a_N(u_N - v_N, w_N) \\ &= a(u - v_N, w_N) + \{a(v_N, w_N) - a_N(v_N, w_N)\} + \{a_N(u_N, w_N) - a(u, w_N)\} \\ &= a(u - v_N, w_N) + \{a(v_N, w_N) - a_N(v_N, w_N)\} + \{\ell_N(w_N) - \ell(w_N)\}. \end{aligned}$$

Wir dividieren durch $\|u_N - v_N\| = \|w_N\|$ und nutzen die Stetigkeit von a aus:

$$\|u_N - v_N\| \leq c \left\{ \|u - v_N\| + \frac{|a(v_N, w_N) - a_N(v_N, w_N)|}{\|w_N\|} + \frac{|\ell_N(w_N) - \ell(w_N)|}{\|w_N\|} \right\}.$$

Es ist v_N ein Element von V_N , und so folgt zusammen mit der Dreiecksungleichung

$$\|u - u_N\| \leq \|u - v_N\| + \|u_N - v_N\|$$

die Behauptung. □

Satz 5.19 Gegeben seien die stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\alpha(\mathbf{x}, \omega) \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \omega)) &= f(\mathbf{x}, \omega), & (\mathbf{x}, \omega) \in D \times \Omega \\ u(\mathbf{x}, \omega) &= 0, & (\mathbf{x}, \omega) \in \partial D \times \Omega \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\alpha_N(\mathbf{x}, \omega) \nabla_{\mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}, \omega)) &= f_N(\mathbf{x}, \omega), & (\mathbf{x}, \omega) \in D \times \Omega \\ u_N(\mathbf{x}, \omega) &= 0, & (\mathbf{x}, \omega) \in \partial D \times \Omega \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$$\|\alpha - \alpha_N\|_{L^\infty(D \times \Omega)} \leq \varepsilon, \quad \|f - f_N\|_{L^2(D) \otimes L^2_P(\Omega)} \leq \varepsilon$$

unterscheiden sich die Lösungen nur um

$$\|u - u_N\|_{H^1(D) \otimes L^2_P(\Omega)} \leq c\varepsilon \left(\|u\|_{H^1(D) \otimes L^2_P(\Omega)} + 1 \right)$$

mit einer von ε unabhängigen Konstanten $c > 0$.

Beweis. Es sei $V = V_N = H_0^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} a(v, w) &= \int_{\Omega} \int_D \alpha(\mathbf{x}, \omega) \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \omega) \nabla_{\mathbf{x}} w(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega), \\ a_N(v, w) &= \int_{\Omega} \int_D \alpha_N(\mathbf{x}, \omega) \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \omega) \nabla_{\mathbf{x}} w(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \ell(w) &= \int_{\Omega} \int_D f(\mathbf{x}, \omega) w(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega), \\ \ell_N(w) &= \int_{\Omega} \int_D f_N(\mathbf{x}, \omega) w(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega). \end{aligned}$$

Die gestörte Bilinearform a_N ist gleichgradig elliptisch für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$, vorausgesetzt ε_0 ist klein genug. Wegen

$$\begin{aligned} |a(v, w) - a_N(v, w)| &= \int_{\Omega} \int_D \{\alpha(\mathbf{x}, \omega) - \alpha_N(\mathbf{x}, \omega)\} \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \omega) \nabla_{\mathbf{x}} w(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) \\ &\leq c \|\alpha - \alpha_N\|_{L^\infty(D \times \Omega)} \|v\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |\ell(w) - \ell_N(w)| &= \int_{\Omega} \int_D \{f(\mathbf{x}, \omega) - f_N(\mathbf{x}, \omega)\} w(\mathbf{x}, \omega) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega) \\ &\leq \|f - f_N\|_{L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

folgt aus dem Lemma von Strang

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} &\leq c \left\{ \inf_{v \in H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \left[\|u - v\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sup_{w \in H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \frac{|a(v, w) - a_N(v, w)|}{\|w\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)}} \right] + \sup_{w \in H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \frac{|\ell(w) - \ell_N(w)|}{\|w\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)}} \right\} \\ &\leq c \left\{ \|\alpha - \alpha_N\|_{L^\infty(D \times \Omega)} \|u\|_{H^1(D) \otimes L_P^2(\Omega)} + \|f - f_N\|_{L^2(D) \otimes L_P^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Voraussetzung liefert die gesuchte Fehlerabschätzung. \square

6. Pivotsierte Cholesky-Zerlegung

6.1 Über die Cholesky-Zerlegung

Es $\mathbf{0} \neq \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische and positiv semidefinite Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Aufgrund der Identität $\text{trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ existiert mindestens ein positiver Diagonaleintrag $a > 0$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass sich dieser an der $(1, 1)$ -Position befindet. Andernfalls finden wir einen Index $2 \leq \ell \leq n$ derart, dass der ℓ -te Diagonaleintrag positiv ist und vertauschen jeweils die erste Zeile und Spalte mit der ℓ -ten Zeile und Spalte. Dies kann durch eine symmetrische Permutationsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ausgedrückt werden, die $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$ erfüllt.

Lemma 6.1 Die Matrix

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^T \\ \hline \mathbf{b} & \mathbf{C} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

sei symmetrisch und positiv semidefinit mit $a > 0$. Dann ist das Schur-Komplement

$$\mathbf{S} := \mathbf{C} - \frac{1}{a} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \quad (6.1)$$

wohldefiniert und ebenso symmetrisch und positiv semidefinit.

Beweis. Da $a > 0$ ist, ist das Schur-Komplement wohldefiniert und wegen

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{C}^T - \frac{1}{a} (\mathbf{b} \mathbf{b}^T)^T = \mathbf{C} - \frac{1}{a} \mathbf{b} \mathbf{b}^T = \mathbf{S}$$

auch symmetrisch. Betrachte nun $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ and setze $x := -\mathbf{b}^T \mathbf{y} / a \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$0 \leq \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}^T \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ x \mathbf{b} + \mathbf{C} \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{S} \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{y}^T \mathbf{S} \mathbf{y},$$

das heißt, \mathbf{S} is auch positiv semidefinit. □

Als Konsequenz dieses Lemmas können wir die Matrix \mathbf{A} zerlegen gemäß

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} a \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Falls nun das Schur-Komplement $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ erfüllt, dann können wir diese Prozedur für \mathbf{S} wiederholen, was auf die Zerlegung

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \frac{1}{a_1} \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} a_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{P}_2 + \frac{1}{a_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_2}{\mathbf{b}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_2}{\mathbf{b}_2} \end{bmatrix}^T + \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{S}_2 \end{array} \right]$$

führt. Allgemein erhalten wir demnach

$$\mathbf{P}_j \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_j = \sum_{i=1}^j \widehat{\boldsymbol{\ell}}_i \widehat{\boldsymbol{\ell}}_i^T + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{S}_j \end{array} \right] \quad (6.3)$$

mit

$$\widehat{\boldsymbol{\ell}}_i := \frac{1}{\sqrt{a_i}} \mathbf{P}_j \mathbf{P}_{j-1} \cdots \mathbf{P}_{i+1} \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \frac{a_i}{\mathbf{b}_i} \end{array} \right\} (i-1)\text{-mal} \quad (6.4)$$

und

$$\mathbf{S}_i := \mathbf{S}_{i-1} - \frac{1}{a_i} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \quad (6.5)$$

für alle $i = 1, 2, \dots, j$. Die endgültige Zerlegung der Matrix \mathbf{A} ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit den Permutationsmatrizen:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^j \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^T + \mathbf{E}_j \quad \text{with } \boldsymbol{\ell}_i := \frac{1}{\sqrt{a_i}} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_i \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \frac{a_i}{\mathbf{b}_i} \end{array} \right\} \text{ for all } i = 1, 2, \dots, j.$$

Hierbei ist die Restmatrix \mathbf{E}_j gegeben durch

$$\mathbf{E}_j := \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_j \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{S}_j \end{array} \right] \mathbf{P}_j \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1.$$

Indem wir die Matrix $\mathbf{L}_j = [\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2, \dots, \boldsymbol{\ell}_j]$ einführen können wir diese Zerlegung kurz schreiben als $\mathbf{A} = \mathbf{L}_j \mathbf{L}_j^T + \mathbf{E}_j$.

Falls $\text{rank } \mathbf{A} = k < n$ gilt, dann bricht der obige Algorithmus nach k Schritten mit $\mathbf{E}_k = \mathbf{0}$ ab, da die Matrix $\mathbf{A}_k := \mathbf{L}_k \mathbf{L}_k^T$ wegen $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$ offensichtlich den Rang k besitzt. Falls der Algorithmus ohne vorzeitigen Abbruch endet und \mathbf{P}_i immer als die Identität gewählt wird, dann produziert er die übliche Cholesky-Zerlegung.

6.2 Niedrigrangapproximation

Wie wir gesehen haben, bricht die pivotisierte Cholesky-Zerlegung im Fall $\text{rank}(\mathbf{A}) = m < n$ nach m Schritten mit $\mathbf{E}_m = \mathbf{0}$ ab. Daher ergibt sich die folgende Fragestellung: Angenommen, es existiert eine Rang- m -Matrix $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_m\| \leq \varepsilon$$

gilt. Kann dann die Cholesky-Zerlegung verwendet werden um diese Approximation zu finden? Mit anderen Worten, führt die Berechnung von $m < n$ Termen von (6.3)–(6.5) zu einer Rang- m -Approximation $\mathbf{A}_m = \mathbf{L}_m \mathbf{L}_m^T$ von \mathbf{A} mit $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_m\| \leq \varepsilon$?

Um diese Frage zu beantworten, wählen wir die Spurnorm als Fehlermaß. Dann wird die bestmögliche Reduktion des Fehlers in (6.2) erzielt, wenn die Spurnorm des Schur-Komplements klein wird. Dies führt auf die Aufgabenstellung

$$\text{trace } \mathbf{S} = \text{trace } \mathbf{A} - \frac{1}{a_{i,i}} \|\mathbf{a}_i\|_2^2 \rightarrow \min_{i=1}^n,$$

wobei \mathbf{a}_i den i -ten Spaltenvektor und $a_{i,i}$ den i -te Diagonaleintrag von \mathbf{A} bezeichnen.

Da das obige Minimierungsproblem nur gelöst werden kann, wenn die Matrix \mathbf{A} vollständig bekannt ist, wählen wir eine andere Strategie: Wir eliminieren einfach den betragsgrößten Eintrag $a_{i,j}$ von \mathbf{A} . Mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $x_i = \sqrt{a_{j,j}/a_{i,i}}$, $x_j = \pm \sqrt{a_{i,i}/a_{j,j}}$ und $x_k = 0$ sonst folgt $0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 2(\sqrt{a_{i,i}a_{j,j}} - |a_{i,j}|)$, das heißt, es gilt

$$|a_{i,j}| \leq \sqrt{a_{i,i}a_{j,j}} \leq \frac{a_{i,i} + a_{j,j}}{2} \leq \max_{i=1}^n a_{i,i}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Folglich befindet der betragsgrößte Eintrag auf der Diagonalen der Matrix \mathbf{A} . Unsere Strategie ist es daher, den betragsgrößten Diagonaleintrag als Pivotelement auszuwählen. Dabei beachte man, dass aufgrund von (6.1) die Folge der Pivotelemente monoton fallend ist bis das Schur-Komplement verschwindet oder das Verfahren beendet wird. Damit erhalten wir den folgenden Algorithmus:

Data: Matrix $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$
Result: Niedrigrang-Approximation $\mathbf{A}_m = \sum_{i=1}^m \mathbf{l}_i \mathbf{l}_i^T$ mit $\text{trace}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \leq \varepsilon$
begin

- setze $m := 1$;
- setze $\mathbf{d} := \text{diag}(\mathbf{A})$ and $\text{error} := \|\mathbf{d}\|_1$;
- initialisiere $\boldsymbol{\pi} := (1, 2, \dots, n)$;
- while** $\text{error} > \varepsilon$ **do**
- bestimme $i := \arg \max\{d_{\pi_j} : j = m, m+1, \dots, n\}$;
- vertausche π_m und π_i ;
- setze $\ell_{m,\pi_m} := \sqrt{d_{\pi_m}}$;
- for** $m+1 \leq i \leq n$ **do**
- berechne $\ell_{m,\pi_i} := \left(a_{\pi_m,\pi_i} - \sum_{j=1}^{m-1} \ell_{j,\pi_m} \ell_{j,\pi_i} \right) / \ell_{m,\pi_m}$;
- datiere $d_{\pi_i} := d_{\pi_i} - \ell_{m,\pi_i}^2$ auf;
- berechne $\text{error} := \sum_{i=m+1}^n d_{\pi_i}$;
- erhöhe $m := m + 1$;

Man beachte, dass dieser Algorithmus *nur* alle Diagonaleinträge der Matrix \mathbf{A} und die m , mit den Pivotelementen assoziierten Spalten explizit benötigt, um die Rang- m -Approximation aufzustellen. Alle weiteren Matrixeinträge gehen nirgendwo in die Berechnung ein. Diese Eigenschaft macht den Algorithmus extrem attraktiv zur effizienten Approximation von nichtlokalen Operatoren.

Satz 6.2 Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit. Dann benötigen m Schritte der pivotisierten Cholesky-Zerlegung den Rechenaufwand $\mathcal{O}(m^2n)$.

Beweis. Der teuerste Teil im Algorithmus ist die Berechnung der Cholesky-Vektoren ℓ_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Diese benötigt jeweils

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^{k-1} 1 \leq \sum_{k=1}^m (k-1)n \leq \frac{m^2}{2}n$$

Additionen und Multiplikationen, woraus das Behauptete folgt. \square

Klingen die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} hinreichend stark exponentiell ab, dann kann bewiesen werden, dass die pivotisierte Cholesky-Zerlegung eine Rang- m -Approximation liefert, welche die Matrix \mathbf{A} exponentiell approximiert.

Satz 6.3 Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mögen unabhängig von n der Bedingung

$$4^m \lambda_m \leq a \exp(-bm)$$

für gewisse Konstanten $a, b > 0$ genügen. Dann erfüllt die pivotisierte Cholesky-Zerlegung \mathbf{A}_m mit Rang $m \geq |\log(\varepsilon/n)|/b$ die Abschätzung $\text{trace}(\mathbf{A}_m - \mathbf{A}) \leq c\varepsilon$ gleichmäßig für jedes $\varepsilon > 0$.

Proof. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Matrix \mathbf{A} so permutiert ist, dass sich für alle $k = 1, 2, \dots, n$ das k -te Pivotelement an der (k, k) -Position befindet. Dann ist $\mathbf{L}_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$ stets eine untere Dreiecksmatrix. Wir partitionieren die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{L}_m gemäß

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{2,1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Aus

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{L}_m \mathbf{L}_m^T = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1,1} \mathbf{L}_{1,1}^T & \mathbf{L}_{1,1} \mathbf{L}_{2,1}^T \\ \mathbf{L}_{2,1} \mathbf{L}_{1,1}^T & \mathbf{L}_{2,1} \mathbf{L}_{2,1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{L}_{2,1} \mathbf{L}_{2,1}^T \end{bmatrix}$$

ist leicht ersichtlich, dass $\mathbf{L}_{1,1} \mathbf{L}_{1,1}^T$ die (pivotisierte) Cholesky-Zerlegung von $\mathbf{A}_{1,1}$ ist. Es gilt folglich

$$\frac{1}{\lambda_m(\mathbf{A}_{1,1})} = \|\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\|_2 = \|\mathbf{L}_{1,1}^{-1}\|_2^2,$$

wobei $\lambda_m(\mathbf{A}_{1,1})$ den m -tgrößten Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}_{1,1}$ bezeichnet.

Ein bekanntes Resultat aus der numerischen linearen Algebra besagt nun, dass für die pivotisierte Cholesky-Zerlegung die (scharfe) Abschätzung $\|\mathbf{L}_{1,1}^{-1}\|_2 \leq \sqrt{4^m + 6m - 1}/(3\ell_{m,m})$ gilt. Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\lambda_m(\mathbf{A}_{1,1})} \leq \frac{4^m + 6m - 1}{9\ell_{m,m}^2} \leq \frac{4^m}{\ell_{m,m}^2}. \quad (6.6)$$

Weil die Spurnorm von $\mathbf{A} - \mathbf{A}_m$ beschränkt ist durch das $(n - m)$ -fache des Pivotelements $\ell_{m,m}^2$, folgt daraus sofort

$$\text{trace}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \leq 4^m(n - m)\lambda_m(\mathbf{A}_{1,1}) \leq 4^m n \lambda_m(\mathbf{A}_{1,1}). \quad (6.7)$$

Nun bezeichne $\mathbf{\Pi}_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die orthogonale Projektion auf die ersten m Koordinaten des \mathbb{R}^n . Dann liefert der Satz von Courant-Fischer die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda_m(\mathbf{A}_{1,1}) &= \inf_{\substack{V \subset \mathbb{R}^m \\ \dim(V)=m-1}} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in V^\perp \\ \|\mathbf{v}\|_2=1}} \|\mathbf{A}_{1,1}\mathbf{v}\|_2 \\ &= \inf_{\substack{V \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(V)=m-1}} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in V^\perp \\ \|\mathbf{v}\|_2=1}} \|\mathbf{\Pi}_m \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_m \mathbf{v}\|_2 \\ &\leq \inf_{\substack{V \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(V)=m-1}} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in V^\perp \\ \|\mathbf{v}\|_2=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2 \\ &= \lambda_m(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (6.7) ein, dann erhalten wir schließlich

$$\text{trace}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \leq 4^m n \lambda_m(\mathbf{A}) \leq a n \exp(-bm).$$

Wählt man nun $m \geq |\log(\varepsilon/n)|/b$, so ergibt sich die Behauptung. \square

Bemerkungen

1. Die Schranke (6.6) ist scharf, das heißt, der Faktor 4^m kann nicht vermieden werden.
2. Im Fall exponentiell abklingender Eigenwerte $\lambda_m \leq a \exp(-bm)$ ist die Spurnorm der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent zu ihrer ℓ^2 -Norm, denn es gilt einerseits

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{m=1}^n \lambda_m = a$$

und andererseits

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = \sum_{m=1}^n \lambda_m \leq a \sum_{m=1}^n \exp(-bm) \leq ca.$$

\diamond

6.3 Berechnung zweiter Momente

Die Zwei-Punkt-Korrelation einer partiellen Differentialgleichung mit stochastischem Lastvektor genügt dem Randwertproblem (3.5) auf dem Produktgebiet $D \times D$. Bezeichnet $V_h = \text{span}\{\phi_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset H_0^1(D)$ einen Finite-Element-Raum bezüglich des Gebiets D , dann führt die Galerkin-Diskretisierung von (3.5) im Tensorproduktraum $V_h \otimes V_h$ auf das Gleichungssystem:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{c}_u) = \text{vec}(\mathbf{c}_f). \quad (6.8)$$

Hierbei ist

$$\mathbf{A} = \left[\int_D \alpha(\mathbf{x}) \langle \nabla \varphi_i(\mathbf{x}), \nabla \varphi_j(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \right]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die gewöhnliche (univariate) Steifigkeitsmatrix, die Matrix

$$\mathbf{c}_f = \left[\int_D \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \right]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

beschreibt den Lastvektor und die gesuchte Korrelation von u besitzt die Darstellung

$$\text{Cor}_{u,h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n [\mathbf{c}_u]_{i,j} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{y}).$$

Das Gleichungssystem (6.8) besitzt die Dimension $n^2 \times n^2$, ist also sehr gross und damit praktisch nur schwer zu lösen. Da die Matrix \mathbf{c}_f allerdings symmetrisch und positiv definit ist, können wir die pivotisierte Cholesky-Zerlegung verwenden, um eine Niedrigrangapproximation zu bestimmen:

$$\mathbf{c}_f \approx \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\ell}_i \boldsymbol{\ell}_i^T.$$

Diese eingesetzt in (6.8) liefert dann

$$\mathbf{c}_u \approx \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\ell}_i.$$

Folglich müssen nur noch m gewöhnliche (univariate) Gleichungssysteme gelöst werden, um die Zwei-Punkt-Korrelation von u zu approximieren. Unter Verwendung eines Mehrgitterverfahrens ist der Aufwand hierfür nur $\mathcal{O}(nm)$. Im Fall $m \ll n$ ist dies rechentechnisch sehr viel günstiger als der Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$, der zur direkten Lösung von (6.8) anfallen würde.

6.4 Verallgemeinerte Eigenwertprobleme

Zur Berechnung der Karhunen-Loève-Entwicklung eines stochastischen Felds $\alpha(\mathbf{x}, \omega) \in L^2(D) \otimes L^2_P(\Omega)$ müssen die Eigenwerte des Hilbert-Schmidt-Operators

$$(\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \text{Cov}_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

bestimmt werden. Die Galerkin-Diskretisierung bezüglich des Finite-Element-Raums $V_h = \text{span}\{\phi_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset L^2(D)$ ergibt ein verallgemeinertes Eigenwertproblem:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = [(\mathcal{K}\phi_i, \phi_j)]_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{B} = [(\phi_i, \phi_j)]_{i,j=1}^n. \quad (6.9)$$

Hierbei ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} symmetrisch und positiv semidefinit and the Massenmatrix \mathbf{B} ist symmetrisch und positiv definit. Wir wollen annehmen, dass die Finite-Element-Basis stabil ist und eine lokalen Träger besitzt, so dass die Matrix \mathbf{B} nur $\mathcal{O}(n)$ Einträge besitzt.

Ersetzen wir \mathbf{A} durch eine Niedrigrangapproximation

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_m := \mathbf{L}_m \mathbf{L}_m^T, \quad \mathbf{L}_m \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

dann erhalten wir

$$\mathbf{L}_m \mathbf{L}_m^T \mathbf{x} = \widehat{\lambda} \mathbf{B} \mathbf{x}. \quad (6.10)$$

Diese Gleichung multiplizieren wir von links und von rechts mit $\mathbf{B}^{-1/2}$:

$$\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{L}_m \mathbf{L}_m^T \mathbf{B}^{-1/2} \widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\lambda} \widehat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1/2} \widehat{\mathbf{x}}.$$

Da $(\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{L}_m)(\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{L}_m)^T$ die gleichen Eigenwerte besitzt wie $(\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{L}_m)^T (\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{L}_m)$, können wir das verallgemeinerte Eigenwertproblem (6.10) in $\mathbb{R}^{n \times n}$ durch ein äquivalentes, gewöhnliches Eigenwertproblem in $\mathbb{R}^{m \times m}$ ersetzen:

$$\mathbf{L}_m^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{L}_m \widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\lambda} \widehat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{L}_m \widehat{\mathbf{x}}. \quad (6.11)$$

Verglichen mit dem ursprünglichen Eigenwertproblem (6.9) ist dieses kleine Eigenwertproblem viel kostengünstiger zu lösen falls $m \ll n$. Die Komplexität ist nämlich nur $\mathcal{O}(m^2 n)$ anstelle von $\mathcal{O}(n^3)$, da $\mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\ell}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) iterativ berechnet werden kann in linearer Komplexität. Es besitzt insbesondere nur nichtverschwindende Eigenwerte $\{\widehat{\lambda}_k\}_{k=1}^m$, welche mit den nichtverschwindenden Eigenwerten des grossen Eigenwertproblems (6.10) übereinstimmen. Eine Fehlerschranke bezüglich der Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ des ursprünglichen Eigenwertproblems (6.9) liefert schliesslich der Satz von Bauer und Fike:

$$\begin{aligned} |\lambda_k - \widehat{\lambda}_k| &\leq \|\mathbf{B}^{-1/2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \mathbf{B}^{-1/2}\|_2 \\ &= \|\mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m)\|_2 \\ &\leq c \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_m\|_2, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

7. Monte-Carlo-Verfahren

Eine generelle Methode, um stochastische partielle Differentialgleichungen zu lösen, stellt das Monte-Carlo-Verfahren dar. Wir beschränken uns auf die Diskussion eines stochastischen Diffusionskoeffizienten. Dieser sei gegeben in der Form

$$\alpha_N(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \xi_\ell(\omega) \quad (7.1)$$

mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen $\xi_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Die Zufallsgrößen mögen $\text{img}(\xi_\ell) = I$ mit einem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erfüllen und eine Dichtefunktion $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen. Setzen wir $\mathbf{I} := I^N$ und $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) := \prod_{j=1}^N \rho(\xi_j)$, so folgt

$$\mathbb{E}\left(u(\boldsymbol{\xi}(\omega))\right) = \int_{\Omega} u(\boldsymbol{\xi}(\omega)) \, dP(\omega) = \int_{\mathbf{I}} u(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} := \bar{u} \in H_0^1(D), \quad (7.2)$$

wobei $u(\boldsymbol{\xi}) \in H_0^1(D)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} -\text{div}_{\mathbf{x}} \left(\left[\mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \xi_\ell \right] \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right) &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \\ u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial D \end{aligned} \right\} \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{I} \quad (7.3)$$

genügt.

Wir wollen den Erwartungswert gemäß (7.2) mit einem Monte-Carlo-Verfahren direkt auswerten. Dazu stehe uns ein Zufallsgenerator zur Verfügung, der eine Folge

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \in I \subset \mathbb{R}$$

von auf I gleichverteilter und stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen liefert. Damit ist es dann kein Problem, mittels $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,N})$ auf \mathbf{I} gleichverteilte Zufallsvektoren

$$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \dots \in \mathbf{I} \subset \mathbb{R}^N$$

zu generieren. Ist der Aufwand $\mathcal{O}(1)$ zur Bestimmung einer Zufallszahl, dann ist dementsprechend $\mathcal{O}(N)$ der Aufwand zur Generierung eines Zufallsvektors der Länge N .

Um den Erwartungswert der Lösung $u(\boldsymbol{\xi})$ der stochastischen partiellen Differentialgleichung zu approximieren, berechnen wir für M zufällige Realisierungen des stochastischen Koeffizienten die zugehörigen Lösungen

$$u(\boldsymbol{\xi}_1), u(\boldsymbol{\xi}_2), u(\boldsymbol{\xi}_3), \dots \in H_0^1(D)$$

von (7.3) und betrachten den gewichteten Mittelwert

$$\bar{u}_M := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(\boldsymbol{\xi}_i) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}_i) \in H_0^1(D). \quad (7.4)$$

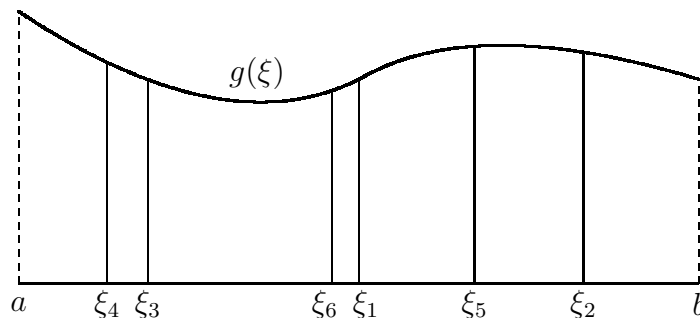
Im statistischen Mittel liefert \bar{u}_M das richtige Ergebnis, denn es ist

$$\mathbb{E}(\bar{u}_M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{E}(u(\xi_i)\rho(\xi_i)) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{\mathbf{I}} u(\xi)\rho(\xi) d\xi = \int_{\mathbf{I}} u(\xi)\rho(\xi) d\xi = \bar{u}.$$

Die Monte-Carlo-Approximation (7.4) ist genau genommen eine *Monte-Carlo-Quadratur* zur Berechnung des Integrals

$$\bar{u} = \int_{\mathbf{I}} g(\xi) d\xi \quad \text{mit} \quad g(\xi) := u(\xi)\rho(\xi). \quad (7.5)$$

Dabei werden zufällig Stützstellen ausgewählt und das Integral durch den Mittelwert approximiert.



Natürlich kann der Fehler beliebig groß sein. Jedoch wird mit wachsendem M die mittlere Abweichung $\mathbb{E}(|\bar{u} - \bar{u}_M|)$ klein.

Satz 7.1 Sei

$$v_g := \frac{1}{|\mathbf{I}|} \int_{\mathbf{I}} (\bar{u} - g(\xi))^2 d\xi.$$

Dann ist die mittlere Abweichung beschränkt durch

$$\mathbb{E}(|\bar{u} - \bar{u}_M|) \leq \sqrt{\frac{v_g}{M}}.$$

Beweis. Wir bestimmen zunächst die mittlere quadratische Abweichung

$$\mathbb{V}(\bar{u}_M) = \mathbb{E}((\bar{u} - \bar{u}_M)^2).$$

Setzen wir $h(\xi) := \bar{u} - g(\xi)$, so gilt

$$\mathbb{E}((\bar{u} - \bar{u}_M)^2) = \mathbb{E}\left[\left(\bar{u} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(\xi_i)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \underbrace{(\bar{u} - g(\xi_i))}_{=h(\xi_i)}\right)^2\right].$$

Die Zufallsgrößen ξ_i sind alle gleichverteilt, so dass folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\bar{u} - \bar{u}_M)^2) &= \frac{1}{M^2 |\mathbf{I}|^M} \int_{\mathbf{I}} \int_{\mathbf{I}} \cdots \int_{\mathbf{I}} \left(\sum_{i=1}^M h(\xi_i) \right)^2 d\xi_M \cdots d\xi_2 d\xi_1 \\
&= \frac{1}{M^2 |\mathbf{I}|^M} \sum_{i=1}^M \int_{\mathbf{I}} \int_{\mathbf{I}} \cdots \int_{\mathbf{I}} h^2(\xi_i) d\xi_M \cdots d\xi_2 d\xi_1 \\
&\quad + \frac{1}{M^2 |\mathbf{I}|^M} \sum_{i \neq j} \int_{\mathbf{I}} \int_{\mathbf{I}} \cdots \int_{\mathbf{I}} h(\xi_i) h(\xi_j) d\xi_M \cdots d\xi_2 d\xi_1 \\
&= \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \underbrace{\frac{1}{|\mathbf{I}|} \int_{\mathbf{I}} h^2(\xi_i) d\xi_i}_{=v_g} \\
&\quad + \frac{1}{M^2} \sum_{i \neq j} \underbrace{\left(\frac{1}{|\mathbf{I}|} \int_{\mathbf{I}} h^2(\xi_i) d\xi_i \right)}_{=0} \underbrace{\left(\frac{1}{|\mathbf{I}|} \int_{\mathbf{I}} h^2(\xi_j) d\xi_j \right)}_{=0} = \frac{v_g}{M}.
\end{aligned}$$

Aus

$$\mathbb{E}^2(|\bar{u} - \bar{u}_M|) \leq \mathbb{E}((\bar{u} - \bar{u}_M)^2)$$

folgt schließlich die Behauptung. \square

Da $\sqrt{v_g}$ eine Konstante ist, die nur vom Integranden g abhängt, ist \sqrt{M} die Konvergenzrate. Folglich schließen wir, dass der Erwartungswert des Fehlers konvergiert wie $\mathcal{O}(\sqrt{M})$. Zwar ist diese Konvergenzrate nicht sehr hoch, allerdings ist sie vollkommen unabhängig von der stochastischen Dimension N . Weil der Aufwand nur linear mit der Dimension wächst, besitzt das Monte-Carlo-Verfahren den Aufwand $\mathcal{O}(N \cdot M)$.

Bemerkungen

1. Falls die Verteilung der Zufallsgrößen $\xi_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ aus (7.1) einer Standardverteilung genügt, dann kann man direkt entsprechend verteilte Zufallszahlen generieren und anstelle von (7.4) den (ungewichteten) Mittelwert

$$\bar{u}_M := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(\xi_i) \quad (7.6)$$

bilden. Diese Approximation ist im allgemeinen genauer, da in Bereichen, wo die Dichte und daher der Beitrag zum Integral klein ist, nicht unnötig viel Punkte spendiert werden.

2. Falls keine Standardverteilung vorliegt, dann kann man mittels *Hit-or-Miss-Monte-Carlo-Verfahren* die durch die Dichte ρ beschriebene Verteilung sampeln. Dazu würfelt man im i -ten Schritt ein Tupel $(\xi_i, \eta_i) \in I \times [\min_{\xi \in I} \rho(\xi), \max_{\xi \in I} \rho(\xi)]$. Ist $\eta_i \leq \rho(\xi_i)$, so wertet man den Integranden aus, ansonsten wird das Sample verworfen. Die erfolgreichen Realisierungen man dann einfach den Mittelwert (7.6).
3. Natürlich funktioniert das oben beschriebene Verfahren auch zur Approximation der Varianz

$$\mathbb{V}(u(\xi(\omega))) = \int_{\mathbf{I}} u^2(\xi) \rho(\xi) d\xi - \bar{u}^2 \in L^1(D).$$

Da der exakte Erwartungswert \bar{u} nicht bekannt ist, ersetzt man diesen durch \bar{u}_M . Um jedoch einen erwartungstreuen Schätzer zu erhalten, muss man die *Stichprobenvarianz* verwenden. Sie im Fall ungewichteter Mittelwerte gegeben durch

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (u(\xi_i) - \bar{u}_M)^2.$$

◇

8. Hochdimensionale Quadratur

8.1 Trapezsumme revisited

Wir wollen nun eine deterministische Methode kennenlernen, mit der man hochdimensionale Integrale wie (7.5) effizient lösen kann. Dazu stellen wir zunächst eine etwas andere Sichtweise auf die *Trapezsumme* vor. Zur Auswertung des bestimmten Integrals

$$I[f] = \int_0^1 f(x) \, dx$$

lautet sie

$$T_j[f] = 2^{-(j+1)} \left\{ f(0) + 2 \sum_{k=1}^{2^j-1} f(2^{-j}k) + f(1) \right\}. \quad (8.1)$$

Ist $f \in C^2([0, 1])$, dann ist der Quadraturfehler der Trapezsumme bekanntlich beschränkt durch

$$E[f] = |(I - T_j)[f]| = \frac{4^{-j}}{12} \|f''\|_{C([0,1])}. \quad (8.2)$$

Definition 8.1 Sei

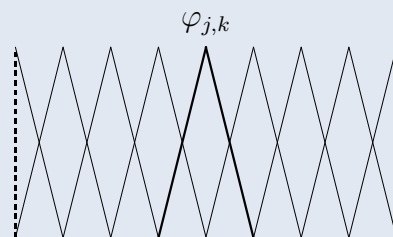
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Hutfunktion**. Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ bilden die Funktionen

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k) \Big|_{[0,1]}, \quad k \in \Delta_j := \{0, 1, \dots, 2^j\},$$

die **nodale Basis** im **Raum der stückweise linearen Funktionen**

$$V_j = \left\{ f \in C([0, 1]) : f \Big|_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]} \in \Pi_1 \text{ für alle } k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \right\}.$$



Eine Funktion $f \in C([0, 1])$ kann mit Hilfe der nodalen Basis in V_j approximiert werden gemäß

$$f(x) \approx f_j(x) := \sum_{k \in \Delta_j} \alpha_{j,k} \varphi_{j,k}(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_{j,k} = f(2^{-j}k).$$

Folglich gilt

$$I[f] = \int_0^1 f(x) dx \approx I[f_j] = \sum_{k \in \Delta_j} \alpha_{j,k} \underbrace{\int_0^1 \varphi_{j,k}(x) dx}_{= \begin{cases} 2^{-j}, & \text{falls } 0 < k < 2^j \\ 2^{-(j+1)}, & \text{sonst} \end{cases}}$$

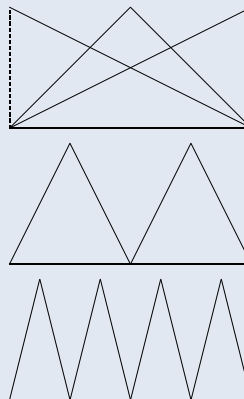
Offensichtlich ist $I[f_j]$ gerade die Trapezsumme $T_j[f]$ aus (8.1).

Definition 8.2 Setzen wir

$$\nabla_\ell := \begin{cases} \{0, 1\}, & \text{falls } \ell = 0, \\ \{1, 3, 5, \dots, 2^\ell - 1\}, & \text{falls } \ell \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann ist die **hierarchische Basis** in V_j definiert durch

$$\{\varphi_{\ell,k}\}_{k \in \nabla_\ell, 0 \leq \ell \leq j}.$$



In der hierarchischen Basis besitzt f_j die Darstellung

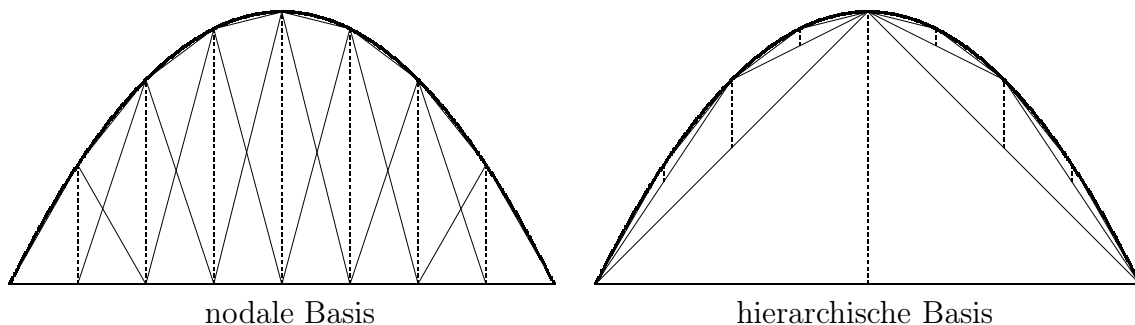
$$f_j(x) = \sum_{\ell=0}^j \sum_{k \in \nabla_\ell} \beta_{\ell,k} \varphi_{\ell,k}(x)$$

$$\text{mit } \beta_{\ell,k} = \begin{cases} f(2^{-\ell}k), & \text{falls } \ell = 0, \\ f(2^{-\ell}k) - \frac{1}{2} \{f(2^{-\ell}(k-1)) + f(2^{-\ell}(k+1))\}, & \text{falls } \ell \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Funktion f_j heißt dann *hierarchischer Interpolant von f* , die Koeffizienten $\beta_{\ell,k}$ heißen *hierarchische Überschüsse*. Ist $f \in C^2([0, 1])$, dann liefert eine Taylor-Entwicklung von $f(x \pm h)$ in x für $\ell > 0$ die Abschätzung

$$|\beta_{\ell,k}| \leq 2^{-(2\ell+1)} \|f''\|_{C([2^{-\ell}(k-1), 2^{-\ell}(k+1)])} \leq 2^{-(2\ell+1)} \|f''\|_{C([0,1])}. \quad (8.3)$$

Beispiel 8.3 Im Fall einer Parabel ergeben sich folgende Darstellungen auf Level $j = 3$:



nodale Basis

hierarchische Basis

△

Mit Hilfe des hierarchischen Interpolanten erhalten wir die Quadraturformel

$$I[f_j] = \sum_{\ell=0}^j \sum_{k \in \nabla_\ell} \beta_{\ell,k} \int_0^1 \varphi_{\ell,k}(x) dx = \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2} + \sum_{\ell=1}^j \sum_{k \in \nabla_\ell} 2^{-\ell} \beta_{\ell,k}.$$

Man beachte, dass bei einer glatt Funktion die hierarchischen Überschüsse gemäß (8.3) sehr schnell sehr klein werden.

8.2 Tensorprodukt-Quadratur

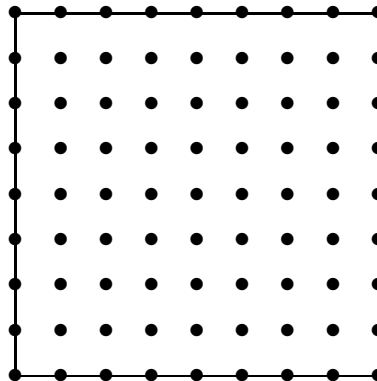
Gegeben sei eine auf $\square = [0, 1] \times [0, 1]$ stetige Funktion $f : \square \rightarrow \mathbb{R}$. Auszuwerten sei das Integral

$$(I \otimes I)[f] = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx.$$

Um das Integral auf \square zu approximieren, gehen wir von der eindimensionalen Trapezsumme aus und bilden deren Tensorprodukt $(T_j \otimes T_j)[f]$. Diese Quadraturformel heißt dann *Tensorprodukt-Trapezsumme*. Wir können sie wie im vorigen Abschnitt als exakte Quadratur $(I \otimes I)[f_j]$ des stückweise *bilinearen Interpolanten*

$$f_j(x, y) = \sum_{k_x \in \Delta_j} \sum_{k_y \in \Delta_j} \alpha_{j, k_x, k_y} \varphi_{j, k_x}(x) \varphi_{j, k_y}(y), \quad \alpha_{j, k_x, k_y} = f(2^{-j} k_x, 2^{-j} k_y) \quad (8.4)$$

interpretieren. Zur Berechnung müssen wir f auf einem regelmäßigen $((2^j + 1) \times (2^j + 1))$ -Gitter auswerten:



Satz 8.4 Die Tensorprodukt-Trapezsumme $T_j \otimes T_j$ genügt der Fehlerabschätzung

$$|(I \otimes I)[f] - (T_j \otimes T_j)[f]| \leq \frac{4^{-j}}{6} \max \left\{ \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_{C(\square)}, \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_{C(\square)} \right\}.$$

Beweis. Wir benutzen ein Standard-Tensorproduktargument:

$$\begin{aligned} & (I \otimes I)[f] - (T_j \otimes T_j)[f] \\ &= (I \otimes I)[f] - (I \otimes T_j)[f] + (I \otimes T_j)[f] - (T_j \otimes T_j)[f] \\ &= (I \otimes (I - T_j))[f] + ((I - T_j) \otimes T_j)[f] \\ &= \int_0^1 E[f(x, \cdot)] \, dx + \sum_{k=0}^{2^j} 2^{-(j+1)} \left\{ E[f(\cdot, 0)] + \sum_{k=1}^{2^j-1} E[f(\cdot, 2^{-j} k)] + E[f(\cdot, 1)] \right\} \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} E[f(x, \cdot)] + \sup_{y \in [0, 1]} E[f(\cdot, y)] \end{aligned}$$

Zusammen mit (8.2) ergibt dies die Behauptung. \square

Bezeichnet $h = 2^{-j}$ die Schrittweite und $M = 1/h$ die Zahl der Teilintervalle auf $[0, 1]$, so ist die Fehlerordnung also wie im Eindimensionalen $\mathcal{O}(h^2)$. Die Tensorprodukt-Trapezsumme benötigt allerdings $(M + 1)^2$ Funktionsauswertungen, im Gegensatz zu $M + 1$ Funktionsauswertungen im Fall der eindimensionalen Trapezsumme.

Bemerkung Die Tensorprodukt-Konstruktion kann leicht für Integrale über dem d -dimensionalen Einheitswürfel $[0, 1]^d$ verallgemeinert werden: die Tensorprodukt-Formel lautet $T_j \otimes T_j \otimes \cdots \otimes T_j$. Satz 8.4 besagt nun, dass sich der Quadraturfehler durch die Summe der eindimensionalen Quadraturfehler abschätzen lässt, dies bedeutet

$$|(I \otimes I \otimes \cdots \otimes I)[f] - (T_j \otimes T_j \otimes \cdots \otimes T_j)[f]| \leq \frac{4^{-j}}{12} \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right\|_{C(\square)}.$$

\diamond

Beachte: Die d -dimensionale Tensorprodukt-Trapezsumme besitzt die feste Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^2)$. Der Aufwand wächst allerdings *exponentiell* mit der Dimension: $\mathcal{O}(M^d)$. Daher spricht man auch vom *Fluch der Dimension*.

8.3 Dünngitter-Quadratur

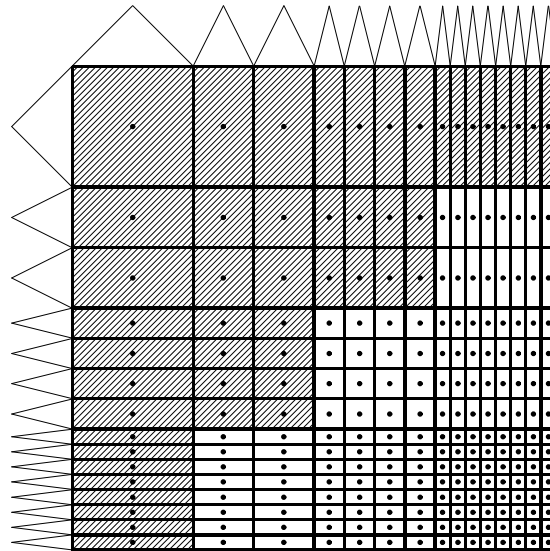
Ersetzen wir die nodale Basis des bilinearen Interpolanten (8.4) durch die hierarchische Basis, dann folgt

$$f_j(x, y) = \sum_{\ell_x, \ell_y \leq j} \sum_{k_x \in \nabla_{\ell_x}} \sum_{k_y \in \nabla_{\ell_y}} \beta_{(\ell_x, k_x), (\ell_y, k_y)} \varphi_{\ell_x, k_x}(x) \varphi_{\ell_y, k_y}(y),$$

wobei die hierarchischen Überschüsse $\beta_{(\ell_x, k_x), (\ell_y, k_y)}$ durch Anwenden des Differenzensterns

$$\mathcal{S}_{(h_x, h_y)} := \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}_*$$

bezüglich des Gitters zu den Schrittweiten $(h_x, h_y) = (2^{-\ell_x}, 2^{-\ell_y})$ auf f entstehen.



Wir wollen nun zeigen, dass wir für $\ell_x + \ell_y > j$ alle Koeffizienten vernachlässigen dürfen, falls f genügend glatt ist. Dies ist dann die *Dünne-Gitter-Quadratur*.

Lemma 8.5 Existiert die Ableitung $\partial^4 f(x, y)/(\partial x^2 \partial y^2)$ für alle $(x, y) \in \square$, dann gilt für alle $\ell_x, \ell_y > 0$ die Abschätzung

$$|\beta_{(\ell_x, k_x), (\ell_y, k_y)}| = |\mathcal{S}_{(2^{-\ell_x}, 2^{-\ell_y})} f(2^{-\ell_x} k_x, 2^{-\ell_y} k_y)| \leq 4^{-(\ell_x + \ell_y + 1)} \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{C(\square)}.$$

Beweis. Taylor-Entwicklung zunächst in der ersten und danach in der zweiten Variable liefert

$$\begin{aligned} & f(x+h, y \pm k) + f(x-h, y \pm k) \\ &= 2f(x, y \pm k) + \int_0^h s \{f_{xx}(x+s, y \pm k) - f_{xx}(x-s, y \pm k)\} ds \\ &= 2f(x, y \pm k) + \int_0^h s \{f_{xx}(x+s, y) - f_{xx}(x-s, y)\} ds \\ &\quad \pm \int_0^h sk \{f_{xxy}(x+s, y) - f_{xxy}(x-s, y)\} ds \\ &\quad \pm \int_0^h \int_0^k st \{f_{xyy}(x+s, y \pm t) - f_{xyy}(x-s, y \pm t)\} dt ds. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$f(x+h, y) + f(x-h, y) = 2f(x, y) + \int_0^h s \{f_{xx}(x+s, y) - f_{xx}(x-s, y)\} ds$$

folgt

$$\begin{aligned} & f(x+h, y+k) + f(x-h, y+k) + f(x+h, y-k) + f(x-h, y-k) \\ &= 2f(x, y+k) + 2f(x, y-k) + 2f(x+h, y) + 2f(x-h, y) - 4f(x, y) \\ &+ \int_0^h \int_0^k st \{ f_{xxyy}(x+s, y+t) + f_{xxyy}(x-s, y-t) \\ &\quad - f_{xxyy}(x+s, y-t) - f_{xxyy}(x-s, y+t) \} dt ds. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. \square

Satz 8.6 Es sei

$$\widehat{f}_j(x, y) := \sum_{\ell_x + \ell_y \leq j} \sum_{k_x \in \nabla_{\ell_x}} \sum_{k_y \in \nabla_{\ell_y}} \beta_{(\ell_x, k_x), (\ell_y, k_y)} \varphi_{\ell_x, k_x}(x) \varphi_{\ell_y, k_y}(y).$$

Existiert die Ableitung $\partial^4 f(x, y) / (\partial x^2 \partial y^2)$ für alle $(x, y) \in \square$, dann gilt die Abschätzung

$$|(I \otimes I)[f_j - \widehat{f}_j]| \leq 4^{-j} \frac{j}{16} \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{C(\square)}.$$

Beweis. Aus Lemma 8.5 erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(I \otimes I)[f_j - \widehat{f}_j]| &= \left| \sum_{\substack{\ell_x, \ell_y \leq j \\ \ell_x + \ell_y > j}} \sum_{k_x \in \nabla_{\ell_x}} \sum_{k_y \in \nabla_{\ell_y}} \beta_{(\ell_x, k_x), (\ell_y, k_y)} \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{\ell_x, k_x}(x) \varphi_{\ell_y, k_y}(y) dy dx \right| \\ &\leq \sum_{\substack{\ell_x, \ell_y \leq j \\ \ell_x + \ell_y > j}} \sum_{k_x \in \nabla_{\ell_x}} \sum_{k_y \in \nabla_{\ell_y}} 2^{-(2\ell_x+1)} 2^{-(2\ell_y+1)} 2^{-\ell_x} 2^{-\ell_y} \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{C(\square)}. \end{aligned}$$

Nun gilt $|\nabla_\ell| = 2^{\ell-1}$ und daher

$$|(I \otimes I)[f_j - \widehat{f}_j]| \leq \sum_{\substack{\ell_x, \ell_y \leq j \\ \ell_x + \ell_y > j}} 4^{-(\ell_x + \ell_y + 2)} \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{C(\square)}.$$

Setzen wir $j < \ell := \ell_x + \ell_y \leq 2j$ und beachten, dass es stets $2j - \ell$ verschiedene Kombinationen mit $\ell = \ell_x + \ell_y$ gibt, dann folgt schließlich

$$|(I \otimes I)[f_j - \widehat{f}_j]| \leq \sum_{\ell=j+1}^{2j} 4^{-(\ell+1)} (2j - \ell) \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{C(\square)} \leq 4^{-(j+2)} j \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{C(\square)}.$$

\square

Proposition 8.7 Existiert die Ableitung $\partial^4 f(x, y)/(\partial x^2 \partial y^2)$ für alle $x, y \in \square$, dann genügt die Dünngitter-Quadratur der Abschätzung

$$|(I \otimes I)[f - \widehat{f}_j]| \leq 4^{-j} \frac{11j}{48} \max \left\{ \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_{C(\square)}, \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_{C(\square)}, \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{C(\square)} \right\}.$$

Beweis. Gemäß Satz 8.4 gilt

$$|(I \otimes I)[f - f_j]| = |(I \otimes I)[f] - (T_j \otimes T_j)[f]| \leq \frac{4^{-j}}{6} \max \left\{ \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_{C(\square)}, \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_{C(\square)} \right\}.$$

Diese Abschätzung muss nun nur noch mit Satz 8.6 kombiniert werden. \square

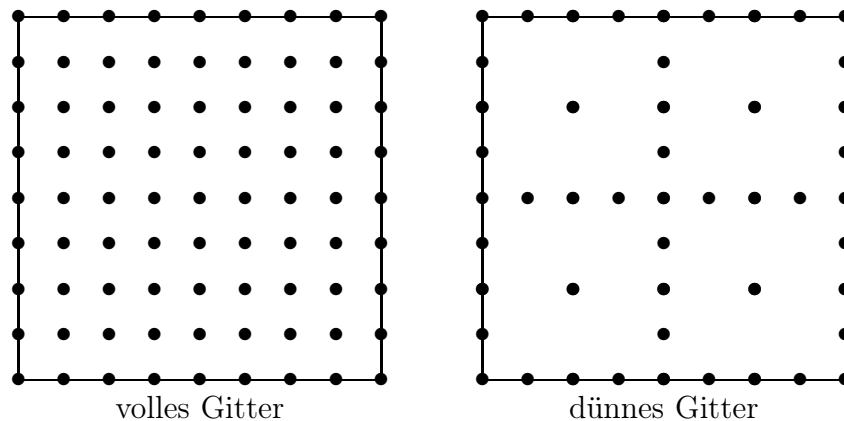
Obwohl die Dünngitter-Quadraturformel fast dieselbe Genauigkeit besitzt wie die Tensorprodukt-Trapezsumme, werden erheblich weniger Quadraturknoten benötigt:

Satz 8.8 Bei der Berechnung von $(I \otimes I)[\widehat{f}_j]$ werden nur $\mathcal{O}(2^j j)$ Funktionsauswertungen benötigt.

Beweis. Pro Koeffizient werden höchstens 9 Funktionsauswertungen ausgeführt. Aus

$$\sum_{\ell_x + \ell_y \leq j} \sum_{k_x \in \nabla_{\ell_x}} \sum_{k_y \in \nabla_{\ell_y}} 1 \leq \sum_{\ell_x + \ell_y \leq j} 2^{\ell_x} 2^{\ell_y} \leq \sum_{\ell=1}^j 2^{\ell} j \leq 2^{j+1} j$$

folgt das Behauptete. \square



Bemerkung Die Dünne-Gitter-Konstruktion kann analog auf den d -dimensionalen Würfel $[0, 1]^d$ verallgemeinert werden. Die Genauigkeit der Dünngitter-Quadratur ist $\mathcal{O}(4^{-j} j^{d-1})$, während der Aufwand im wesentlichen dem der Trapezsumme entspricht: $\mathcal{O}(2^j j^{d-1})$. \diamond

9. Konvergenzanalyse des polynomialen Chaos

9.1 Stochastische Regularität

Zunächst wollen wir die Regularität der Lösung $u \in H_0^1(D) \otimes L_p^2(\Omega)$ einer stochastischen partiellen Differentialgleichung bezüglich ihrer stochastischen Variablen untersuchen. Dazu beschränken wir uns wieder auf den Fall eines stochastischen Diffusionskoeffizienten. Dieser sei gegeben in der Form

$$\alpha_N(\mathbf{x}, \omega) = \mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \xi_\ell(\omega) \quad (9.1)$$

mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen $\xi_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Die Zufallsgrößen mögen $\text{img}(\xi_\ell) = I$ mit einem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erfüllen und eine Dichtefunktion $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen. Setzen wir $\mathbf{I} := I^N$ und $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) := \prod_{i=1}^N \rho(\xi_i)$, so suchen wir eine Funktion $u \in H_0^1(D) \otimes L_\rho^2(\mathbf{I})$ mit

$$\left. \begin{aligned} -\text{div}_{\mathbf{x}} \left(\overbrace{\left[\mathbb{E}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\ell=1}^N \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell(\mathbf{x}) \xi_\ell \right]}^{=\alpha_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \right) \nabla_{\mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \\ u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D \end{aligned} \right\} \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{I}. \quad (9.2)$$

Satz 9.1 Falls u (9.2) löst, dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass gilt

$$\left\| \partial_{\boldsymbol{\xi}}^\alpha u_N(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \right\|_{H^1(D)} \leq C^{|\alpha|} |\alpha|! \prod_{\ell=1}^N \left(\sqrt{\lambda_\ell} \|\varphi_\ell\|_{L^\infty(D)} \right)^{\alpha_\ell} \|u_N(\cdot, \boldsymbol{\xi})\|_{H^1(D)} \quad (9.3)$$

für alle $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{I}$ und $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N$. Dabei hängt die Konstante C nicht von der Länge N der Entwicklung ab, vorausgesetzt, dass (9.1) gleichmäßig beschränkt bleibt

$$0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \bar{\alpha} < \infty \quad \text{für alle } (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in D \times \mathbf{I}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit vollständige Induktion über $|\boldsymbol{\alpha}|$. Da für $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$ nichts zu zeigen ist, nehmen wir an, dass sie für alle $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N$ gilt mit $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k \in \mathbb{N}$. Wir

betrachten nun einen Multiindex α mit $|\alpha| = k + 1$ und wenden ∂_{ξ}^{α} auf (9.2) an:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{\xi}^{\alpha} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\alpha_N(\mathbf{x}, \xi) \nabla_{\mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}, \xi)) \\
&= \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\sum_{\beta \leq \alpha} \left[\binom{\alpha}{\beta} \partial_{\xi}^{\beta} \alpha_N(\mathbf{x}, \xi) \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\xi}^{\alpha-\beta} u_N(\mathbf{x}, \xi) \right] \right) \\
&= \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\sum_{\ell=1}^N \left[\alpha_{\ell} \sqrt{\lambda_{\ell}} \varphi_{\ell}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\xi}^{\alpha-e_{\ell}} u_N(\mathbf{x}, \xi) \right] + \alpha_N(\mathbf{x}, \xi) \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\xi}^{\alpha} u_N(\mathbf{x}, \xi) \right) \\
&= \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\sum_{\ell=1}^N \left[\alpha_{\ell} \sqrt{\lambda_{\ell}} \varphi_{\ell}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\xi}^{\alpha-e_{\ell}} u_N(\mathbf{x}, \xi) \right] \right) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\alpha_N(\mathbf{x}, \xi) \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\xi}^{\alpha} u_N(\mathbf{x}, \xi)).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass meist nur wenige Komponenten aus α größer als Null sind, so dass die Summe weniger als N Summanden enthält.

Aus dem Übergang zur schwachen Formulierung

$$\begin{aligned}
&\int_D \alpha_N(\mathbf{x}, \xi) \langle \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\xi}^{\alpha} u_N(\mathbf{x}, \xi), \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x} \\
&= - \sum_{\ell=1}^N \int_D \alpha_{\ell} \sqrt{\lambda_{\ell}} \varphi_{\ell}(\mathbf{x}) \langle \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\xi}^{\alpha-e_{\ell}} u_N(\mathbf{x}, \xi), \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(D)
\end{aligned}$$

folgt nun

$$\left\| \partial_{\xi}^{\alpha} u_N(\cdot, \xi) \right\|_{H^1(D)} \leq C \sum_{\ell=1}^N \alpha_{\ell} \sqrt{\lambda_{\ell}} \|\varphi_{\ell}\|_{L^{\infty}(D)} \left\| \partial_{\xi}^{\alpha-e_{\ell}} u_N(\cdot, \xi) \right\|_{H^1(D)}.$$

Das Einsetzen der Induktionsannahme liefert wegen $\sum_{\ell=1}^N \alpha_{\ell} = |\alpha|$ schließlich die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_{\xi}^{\alpha} u_N(\cdot, \xi) \right\|_{H^1(D)} &\leq C^{|\alpha|} (|\alpha| - 1)! \sum_{\ell=1}^N \alpha_{\ell} \prod_{k=1}^N \left(\sqrt{\lambda_k} \|\varphi_k\|_{L^{\infty}(D)} \right)^{\alpha_k} \left\| u_N(\cdot, \xi) \right\|_{H^1(D)} \\
&\leq C^{|\alpha|} |\alpha|! \prod_{k=1}^N \left(\sqrt{\lambda_k} \|\varphi_k\|_{L^{\infty}(D)} \right)^{\alpha_k} \left\| u_N(\cdot, \xi) \right\|_{H^1(D)}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung Wenn die Kovarianz $\operatorname{Cov}_{\alpha} \in L^2(D \times D)$ analytisch auf $\overline{D \times D}$ ist, dann gilt gemäß den Sätzen 5.13 und 5.16

$$\gamma_{\ell} := \sqrt{\lambda_{\ell}} \|\varphi_{\ell}\|_{L^{\infty}(D)} \leq a \exp(-b\ell^{1/d}).$$

Aufgrund des Faktors

$$\prod_{\ell=1}^N \gamma_{\ell}^{\alpha_{\ell}} = \prod_{\ell=1}^N \left(\sqrt{\lambda_{\ell}} \|\varphi_{\ell}\|_{L^{\infty}(D)} \right)^{\alpha_{\ell}}$$

in (9.3) werden für festes $|\alpha|$ die Ableitungen immer glatter, je höher die stochastische Dimensionen wird. ◇

9.2 Stochastische Diskretisierung

Um das Abklingen der Ableitungen bezüglich der Raumdimension ausnutzen zu können, ziehen wir als Ansatz- und Testraum allgemeine Tensorprodukt-Polynome

$$\Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I}) := \bigotimes_{\ell=1}^N \Pi_{r_\ell}(I), \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N) \in \mathbb{N}_0^N$$

in Betracht. Damit wollen wir nun die folgende Variationsaufgabe lösen: suche $u_{N,\mathbf{r}} \in H_0^1(D) \otimes \Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I})$, so dass

$$\begin{aligned} \int_D \int_{\mathbf{I}} \alpha_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \langle \nabla_{\mathbf{x}} u_{N,\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rangle \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} \\ = \int_D \int_{\mathbf{I}} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(D) \otimes \Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I}). \end{aligned}$$

Lemma 9.2 Es bezeichne $P_r : L_\rho^2(I) \rightarrow \mathbb{R}$ die Orthoprojektion auf den Polynomraum $\Pi_r(I)$ und

$$P_{\mathbf{r}} = P_{r_1} \otimes P_{r_2} \otimes \dots \otimes P_{r_N} : L_\rho^2(\mathbf{I}) \rightarrow \mathbb{R}$$

die Orthoprojektion auf den Tensorprodukt-Polynomraum

$$\Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I}) := \bigotimes_{\ell=1}^N \Pi_{r_\ell}(I).$$

Dann gilt

$$\|f - P_{\mathbf{r}}f\|_{L_\rho^2(\mathbf{I})} \leq \sum_{\ell=1}^N \|f - P_{r_\ell} f\|_{L_\rho^2(\mathbf{I})}$$

Mit anderen Worten, die Gesamtfehler einer Tensorproduktapproximation lässt sich als Summe der entsprechenden eindimensionalen Fehler abschätzen.

Beweis. Sei

$$I^{(\ell)} := \underbrace{I \otimes I \otimes \dots \otimes I}_{\ell \text{ Faktoren}}$$

Dann beweisen wir zunächst die Aussage

$$I^{(N)} - P_{\mathbf{r}} = \sum_{\ell=1}^N \left((P_{r_1} \otimes \dots \otimes P_{r_{\ell-1}}) \otimes (I - P_{r_\ell}) \otimes I^{(N-\ell)} \right) \quad (9.4)$$

mit Hilfe von vollständiger Induktion über N . Da für $N = 1$ ist nichts zu zeigen ist,

nehmen wir an, dass (9.4) gilt für ein gegebenes N . Damit folgt

$$\begin{aligned}
& I^{(N+1)} - (P_{\mathbf{r}} \otimes P_{r_{N+1}}) \\
&= (I^{(N)} - P_{\mathbf{r}}) \otimes I + P_{\mathbf{r}} \otimes (I - P_{r_{N+1}}) \\
&= \sum_{\ell=1}^N \left((P_{r_1} \otimes \cdots \otimes P_{r_{\ell-1}}) \otimes (I - P_{r_\ell}) \otimes I^{(N-\ell+1)} \right) + P_{\mathbf{r}} \otimes (I - P_{r_{N+1}}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N+1} \left((P_{r_1} \otimes \cdots \otimes P_{r_{\ell-1}}) \otimes (I - P_{r_\ell}) \otimes I^{(N+1-\ell)} \right).
\end{aligned}$$

Wegen $\|P_{r_\ell}\| \leq 1$ für alle $\ell = 1, \dots, N$, ergibt sich schließlich aus (9.4)

$$\begin{aligned}
\|f - P_{\mathbf{r}}f\|_{L^2_{\rho}(\mathbf{I})} &\leq \sum_{\ell=1}^N \left\| \left((P_{r_1} \otimes \cdots \otimes P_{r_{\ell-1}}) \otimes (I - P_{r_\ell}) \otimes I^{(N-\ell)} \right) f \right\|_{L^2_{\rho}(\mathbf{I})} \\
&\leq \sum_{\ell=1}^N \left\| \left(I^{(\ell-1)} \otimes (I - P_{r_\ell}) \otimes I^{(N-\ell)} \right) f \right\|_{L^2_{\rho}(\mathbf{I})} \\
&= \sum_{\ell=1}^N \left\| (I^{(N)} - P_{r_\ell e_\ell}) f \right\|_{L^2_{\rho}(\mathbf{I})}.
\end{aligned}$$

□

Satz 9.3 Seien

$$\gamma_\ell := \sqrt{\lambda_\ell} \|\varphi_\ell\|_{L^\infty(D)} \leq a \exp(-b\ell^{1/d}) \leq 1 \quad \text{für alle } \ell = 1, 2, \dots, N$$

und die Konstante aus (9.3) erfülle $C < 2/(a \operatorname{diam}(I))$. Der Polynomraum

$$\Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I}) := \bigotimes_{\ell=1}^N \Pi_{r_\ell}(I)$$

mit

$$r_\ell := \left\lceil \left(\frac{N}{\ell} \right)^{1/d} \right\rceil, \quad \ell = 1, 2, \dots, N,$$

besitzt $M = \mathcal{O}(\exp(N/d))$ Freiheitsgrade. Wird er zur stochastischen Diskretisierung eingesetzt, so wird die Konvergenzrate

$$\|u_N - u_{N,\mathbf{r}}\|_{H^1(D) \otimes L^2_{\rho}(\mathbf{I})} \leq g \exp(-hN^{1/d})$$

erzielt. Wegen $\log M \sim N$, ist die Konvergenzrate, ausgedrückt in Termen von Freiheitsgraden, folglich subalgebraisch falls $d > 1$ ist.

Beweis. Wir führen den Beweis in vier Schritten.

(i.) Es gilt

$$\dim(\Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I})) = \prod_{\ell=1}^N r_\ell \leq c \prod_{\ell=1}^N \left(\frac{N}{\ell} \right)^{1/d} = c \left(\frac{N^N}{N!} \right)^{1/d},$$

woraus aufgrund der Stirlingschen Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ sofort mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$ folgt

$$M = \dim(\Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I})) \leq c \exp(N/d).$$

Dies beweist den ersten Teil der Aussage.

(ii.) Wir schätzen nun für eine beliebige Koordinate ℓ den Approximationsfehler $\|u_N - P_{r_\ell \mathbf{e}_\ell} u_N\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})}$ ab. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathbf{I} = (-q, q)^N$ gilt. Für ein gegebenes $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbf{I}$ wollen wir $u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ um den Punkt $\boldsymbol{\xi}_0 = (\xi_1, \dots, \xi_{\ell-1}, 0, \xi_{\ell+1}, \dots, \xi_N) \in \mathbf{I}$ in eine Taylor-Reihe entwickeln. Dies ist möglich, da $u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ in der stochastischen Variable gemäß (9.3) entlang der Geraden $L = \{\boldsymbol{\xi}_0 + t\mathbf{e}_\ell : t \in [-q, q]\}$ beliebig glatt ist. Es ist

$$u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=0}^n \partial_{\xi_\ell}^k u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_0) \frac{\xi_\ell^k}{k!} + R_n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

mit dem Taylor-Restglied R_n in Integralform

$$R_n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \xi_\ell^{n+1} \int_0^1 \partial_{\xi_\ell}^{n+1} u_N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_0 + t(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0)) \frac{(1-t)^n}{n!} dt.$$

Für dieses gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|R_n(\cdot, \boldsymbol{\xi})\|_{H^1(D)} &\leq |\xi_\ell|^{n+1} \int_0^1 \|\partial_{\xi_\ell}^{n+1} u_N(\cdot, \boldsymbol{\xi}_0 + t(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0))\|_{H^1(D)} \frac{(1-t)^n}{n!} dt \\ &\leq |\xi_\ell|^{n+1} \sup_{t \in [0,1]} \|\partial_{\xi_\ell}^{n+1} u_N(\cdot, \boldsymbol{\xi}_0 + t(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0))\|_{H^1(D)} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt \\ &\leq \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\boldsymbol{\eta} \in L} \|\partial_{\xi_\ell}^{n+1} u_N(\cdot, \boldsymbol{\eta})\|_{H^1(D)}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (9.3) erhalten wir folglich

$$\|R_n(\cdot, \boldsymbol{\xi})\|_{H^1(D)} \leq \underbrace{(Cq\gamma_\ell)^{n+1}}_{\leq 1} \underbrace{\sup_{\boldsymbol{\eta} \in L} \|u_N(\cdot, \boldsymbol{\eta})\|_{H^1(D)}}_{< \infty} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{I}.$$

Schließlich können wir den eindimensionalen Approximationsfehler abschätzen:

$$\|u_N - P_{n\mathbf{e}_\ell} u_N\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})} \leq \|R_n\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})} \leq c(Cq\gamma)^{n+1}.$$

Für $n = r_\ell = \lceil N^{1/d} / \ell^{1/d} \rceil$ und $\gamma_\ell \leq a \exp(-b\ell^{1/d})$ liefert dies dann

$$\|u_N - P_{r_\ell \mathbf{e}_\ell} u_N\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})} \leq c \underbrace{(Caq)^{r_\ell}}_{\leq 1} \exp(-bN^{1/d}) \leq c \exp(-bN^{1/d}).$$

(iii.) Das Strangische Lemma 5.18 liefert die Fehlerabschätzung

$$\|u_N - u_{N,\mathbf{r}}\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})} \leq c_S \inf_{v \in \Pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{I})} \|u_N - v\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})}.$$

Dies können wir gemäß Lemma 9.2 und (ii.) abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|u_N - u_{N,\mathbf{r}}\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})} &\leq c_S \sum_{\ell=1}^N \|u_N - P_{r_\ell \mathbf{e}_\ell} u_N\|_{H^1(D) \otimes L^2_\rho(\mathbf{I})} \\ &\leq cc_S N \exp(-bN^{1/d}). \end{aligned}$$

Für ein geeignetes $g > 0$ und $h < b$ gilt daher

$$\|u_N - u_{N,\mathbf{r}}\|_{H^1(D) \otimes L^2_p(\mathbf{I})} \leq g \exp(-hN^{1/d}).$$

(iv.) Die letzte Aussage bezüglich der Freiheitsgrade bestätigt man durch Nachrechnen. \square

Bemerkungen

1. Die Bedingung an die Konstante C aus Satz 9.3 ist nicht wirklich nötig, um das vorliegende Konvergenzresultat zu zeigen. Allerdings benötigt man dann Beweistechniken, die uns nicht zur Verfügung stehen.
2. Um eine Differentialgleichung mit stochastischen Diffusionskoeffizienten zu lösen, berechnet man zunächst die Karhunen-Löve-Entwicklung aus N Termen. Ist der Kovarianzkern analytisch, so folgt insgesamt exponentielle Konvergenz:

$$\begin{aligned} \|u - u_{N,\mathbf{r}}\|_{H^1(D) \otimes L^2_p(\Omega)} &\leq \underbrace{\|u - u_N\|_{H^1(D) \otimes L^2_p(\Omega)}}_{\leq a \exp(-bN^{1/d})} + \underbrace{\|u_N - u_{N,\mathbf{r}}\|_{H^1(D) \otimes L^2_p(\Omega)}}_{\leq g \exp(-hN^{1/d})} \\ &\leq c \exp(-\min\{b, h\}N^{1/d}). \end{aligned}$$

\diamond

Index

- $H^m(D)$ -Seminorm, 8
- σ -Algebra, 14
 - Borelsche, 14
- Überschuss
 - hierarchischer, 80
- Basis
 - hierarchische, 80
 - nodale, 79
- Basisfunktionen, 34
- Besselsche Ungleichung, 33
- Bilinearform
 - H -elliptische, 11
 - stetige, 11
- Dünnes Gitter, 85
- Dichtefunktion, 15
 - der Normalverteilung, 16
- Energienorm, 11
- Ereignis
 - zufälliges, 14
- Ereignisraum, 14
- Erwartungswert, 17
- Fluch der Dimension, 82
- Funktion
 - messbare, 16
- Gaußscher Prozess, 54
- Gewichtsfunktion, 29
- Gleichverteilung, 16
- Hermite-Polynom, 32
- hierarchische Basis, 80
- Hilbert-Schmidt-Kern, 46
- Hilbert-Schmidt-Operator, 46
- Hutfunktion, 79
- Integraloperator, 46
- Interpolant
 - bilinearer, 81
 - hierarchischer, 80
- Karhunen-Loève-Entwicklung, 53
- Kernfunktion, 46
- Korrelation, 18
 - Zwei-Punkt-, 22
- Kovarianz, 18
- Lösung
 - klassische, 9
 - schwache, 12
- Legendre-Polynom, 31
- Lemma
 - von Ehrling, 63
 - von Strang, 66
- messbarer Raum, 14
- Mittelwert, 17
- Moment, 17
 - zentriertes, 17
- Monte-Carlo-Verfahren, 75
 - Hit-or-Miss-, 77
- Niedrigrangapproximation, 70
- nodale Basis, 79
- Normalverteilung, 16
- Operator
 - kompakter, 43
- Parsevalsche Identität, 33
- pivotisierte Cholesky-Zerlegung, 70
- Poincaré-Friedrichsche Ungleichung, 8
- Polynom
 - Hermite-, 32
 - Legendre-, 31
- Quadratur
 - Dünne-Gitter-, 83
 - Monte-Carlo-, 76
 - Tensorprodukt-Trapezsumme, 81
 - Trapezsumme, 79

Satz

- Charakterisierungssatz, 10

- von Lax-Milgram, 11

- schwache Ableitung, 7

- Singulärwertzerlegung, 48

- Sobolev-Raum

- $H^m(D)$, 8

- $H_0^m(D)$, 8

- Spurnorm, 70

- Stichprobenvarianz, 78

- stochastische Diskretisierung, 37

- Trapezsumme, 79

- Tensorprodukt-, 81

- Unabhängigkeit, 35

- Varianz, 17

- Versuch, 13

- Verteilung

- Gleich-, 16

- Normal-, 16

- Wahrscheinlichkeit, 15

- Wahrscheinlichkeits-

- maß, 15

- raum, 13, 15

- Zufalls-

- experiment, 13

- größe, 16

- variable, 16