

## Programmieraufgabe 4.

zu bearbeiten bis **20.5.2014**.

Die Karhunen-Loève-Entwicklung

$$a(\mathbf{x}, \omega) \approx \mathbb{E}_a(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^M \sigma_k \varphi_k(\mathbf{x}) X_k(\omega)$$

des stochastischen Feldes  $a(\mathbf{x}, \omega)$  ist gegeben durch den Erwartungswert  $\mathbb{E}_a(\mathbf{x})$  und den Kovarianzkern  $C: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gilt  $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ , wobei  $\{(\lambda_k, \varphi_k)\}_{k=1}^M$  die führenden  $M$  Eigenpaare des Kovarianzoperators

$$(Cu)(\mathbf{x}) = \int_D C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

sind. Das *Rayleigh-Ritz-Verfahren* dieses Eigenwertproblems im Finiten-Element-Raums  $V_h \subset L^2(D)$  lautet:

suche  $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R} \times V_h$ , so dass  $(C\varphi, v)_{L^2(D)} = \lambda(\varphi, v)_{L^2(D)}$  für alle  $v \in V_h$ .

In dieser Programmieraufgabe approximieren wir die Karhunen-Loève-Entwicklung des Koeffizienten mit Hilfe stückweise konstanter finiter Elemente  $\{\chi_k\}_{k=1}^n$ , das heisst,  $V_h$  ist der Raum der stückweise konstanten Ansatzfunktionen auf  $D$ . Zur Diskretisierung des Kovarianzoperators interpolieren wir den Kovarianzkern in den Elementschwerpunkten  $\{\mathbf{x}_i^{\text{SP}}\}_{i=1}^n$ . Ist weiterhin  $\mathbf{D} = [d_{i,j}]_{i,j=1}^n$  mit  $d_{i,j} = (\chi_i, \chi_j)_{L^2(D)}$  die zugehörige Massmatrix, so gilt mit  $\mathbf{C} = [C(\mathbf{x}_i^{\text{SP}}, \mathbf{x}_j^{\text{SP}})]_{i,j=1}^n$  offensichtlich

$$(Cu, v)_{L^2(D)} \approx \mathbf{u}^T \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{v} \text{ für alle } u, v \in V_h.$$

Setzen wir nun  $v = \chi_k$  an, erhalten wir folglich das Eigenwertproblem  $\mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{D} \mathbf{x}$ . Zu dessen Lösung wollen wir die *pivotisierte Cholesky-Zerlegung*  $\mathbf{C} \approx \mathbf{L}_M \mathbf{L}_M^T$  verwenden, die gemäss dem folgenden Algorithmus bestimmt wird:

---

### Algorithmus pCholesky

---

*Input:*  $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , Genauigkeit  $\varepsilon > 0$

*Output:* Cholesky-Zerlegung  $\mathbf{L}_k \mathbf{L}_k^T \approx \mathbf{A}$ , Permutationsvektor  $\mathbf{p} \in \{1, 2, \dots, n\}^n$

initialisiere  $\mathbf{p} = [1, 2, \dots, n]$ ,  $\mathbf{d} = [a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}]^T$ ,  $tr = \|\mathbf{A}\|_{\text{tr}}$ ,  $k = 1$

**while**  $k \leq n$  &  $tr \geq \varepsilon$  **do**

setze  $pivl := \operatorname{argmax}_{\ell \in \{k, k+1, \dots, n\}} \mathbf{d}_{p_\ell}$

vertausche  $\mathbf{p}_{pivl} \leftrightarrow \mathbf{p}_k$

setze  $\mathbf{L}_{\mathbf{p}_k, k} := \sqrt{\mathbf{d}_{\mathbf{p}_k}}$

setze  $\mathbf{L}_{\mathbf{p}_{k+1:n}, k} := \mathbf{A}_{\mathbf{p}_{k+1:n}, \mathbf{p}_k} / \mathbf{L}_{\mathbf{p}_k, k}$

update  $\mathbf{L}_{\mathbf{p}_{k+1:n}, k} := \mathbf{L}_{\mathbf{p}_{k+1:n}, k} - \mathbf{L}_{\mathbf{p}_{k+1:n}, 1:k-1} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{p}_k, 1:k-1}^T / \mathbf{L}_{\mathbf{p}_k, k}$

update  $\mathbf{d}_{\mathbf{p}_{k:n}} := \mathbf{d}_{\mathbf{p}_{k:n}} - [\mathbf{L}_{\mathbf{p}_k, k}^2, \mathbf{L}_{\mathbf{p}_{k+1}, k}^2, \dots, \mathbf{L}_{\mathbf{p}_n, k}^2]^T$

update  $tr := \|\mathbf{d}_{\mathbf{p}_{k:n}}\|_1$

setze  $k := k + 1$

**end while**

---

Damit müssen wir schliesslich das Eigenwertproblem

$$\mathbf{D}\mathbf{L}_M\mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{D}\mathbf{x} \quad (1)$$

lösen, das mit  $\mathbf{y} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{x}$  äquivalent ist zu

$$\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{L}_M\mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}.$$

Nutzen wir aus, dass die Eigenwerte von  $\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{L}_M\mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}^{1/2}$  dieselben sind, wie die von  $\mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{L}_M = \mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}\mathbf{L}_M$ , dann führt dies für  $M \ll n$  zu einer grossen Verringerung des Rechenaufwandes. Die Eigenwerte und Eigenvektoren des kleinen Eigenwertproblems für  $\mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}\mathbf{L}_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$  können einfach mit der Matlab-Funktion `eig` bestimmt werden. Sind  $\{(\lambda_k, \tilde{\mathbf{v}}_k)\}_{k=1}^M$  die orthogonalen Eigenpaare von  $\mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}\mathbf{L}_M$ , so lösen  $\{(\lambda_k, \mathbf{L}_M\tilde{\mathbf{v}}_k)\}_{k=1}^M$  das ursprüngliche Eigenwertproblem (1). Insbesondere haben wir

$$(\mathbf{L}_M\tilde{\mathbf{v}}_k)^\top\mathbf{D}(\mathbf{L}_M\tilde{\mathbf{v}}_j) = \tilde{\mathbf{v}}_k^\top\mathbf{L}_M^\top\mathbf{D}\mathbf{L}_M\tilde{\mathbf{v}}_j = \delta_{k,j}\lambda_k.$$

Dies bedeutet, die Funktionen  $\chi(\mathbf{x})\mathbf{L}_M\tilde{\mathbf{v}}_k$  sind orthogonal mit  $L^2$ -Norm  $\lambda_k$ , wobei  $\chi(\mathbf{x}) := [\chi_1(\mathbf{x}), \dots, \chi_n(\mathbf{x})]$ . Die Approximation an die Karhunen-Loève Entwicklung ergibt sich somit zu

$$a(\mathbf{x}, \omega) \approx \mathbb{E}_a(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^M \chi(\mathbf{x})\mathbf{L}_M\tilde{\mathbf{v}}_k X_k(\omega)$$

**Aufgabe 1.** Implementieren Sie die Matlab-Funktion

$$[\mathbf{L}, \mathbf{p}] = \text{pCholesky}(\mathbf{c}, n, \text{tol}),$$

die den Algorithmus numerisch umsetzt. Der Parameter `c` sei hierbei ein `function handle`, der für ein Indexpaar  $(i, j)$  den zugehörigen Matrixeintrag zurückgibt. Insbesondere, soll die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  nie explizit aufgestellt werden. Der Parameter `n` entspricht der Dimension und `tol` gibt die Abbruchgenauigkeit vor. Es sollen abgesehen von der `while`-Schleife keine weiteren Schleifen verwendet werden.

Schreiben Sie weiterhin die Funktion

$$[\Phi] = \text{KarhunenLoeve}(\mathbf{L}_M, \mathbf{D}),$$

die bezüglich der pivotisierten Cholesky-Zerlegung  $\mathbf{L}_M$  und der Massenmatrix  $\mathbf{D}$  die Vektoren  $\mathbf{L}_M\tilde{\mathbf{v}}_k$  in der Matrix  $\Phi$  gespeichert zurückgibt.

**Aufgabe 2.** Approximieren Sie den Erwartungswert und die Varianz des Poisson-Problems mit log-normalem Koeffizienten  $\exp(a(\mathbf{x}, \omega))$  auf dem Einheitsquadrat. Verwenden Sie hierzu das Monte-Carlo- und das Quasi-Monte-Carlo-Verfahren mit  $N = 10^4$  Samples. Das stochastische Feld  $a(\mathbf{x}, \omega)$  sei beschrieben durch den Gaußschen Kovarianzkern  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_2^2)$  und den Erwartungswert  $\mathbb{E}_a(\mathbf{x}) = 0$ . Die rechte Seite sei  $f(\mathbf{x}) = 1$ . Der Abbruchfehler der pivotisierten Cholesky-Zerlegung sei `tol` =  $10^{-8}$ . Das Grobgitter auf dem Einheitsquadrat soll fünfmal verfeinert werden (Level 5). Verwenden Sie die Lösung der Quasi-Monte-Carlo-Approximation als Referenz, um damit die Konvergenz der Monte-Carlo-Approximation zu untersuchen. Bestimmen Sie hierzu den relativen  $L^2$ -Fehler der Monte-Carlo-Lösungen mit 10, 100, 1000, 10000 Samples und tragen diesen in einem `loglog`-Plot gegen die Anzahl der Samples auf.