Programmieraufgabe 1.

zu bearbeiten bis **Montag, 17.03.2014**.

In dieser Programmieraufgabe soll das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})\big) &= f(\mathbf{x}) \qquad && \mathbf{x}\in D,\ \mathbf{y}\in[-1,1]^M \\ u(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0 && \mathbf{x}\in\Gamma := \partial D,\ \mathbf{y}\in[-1,1]^M \end{aligned}$$

mit variablem *Diffusionskoeffizienten* $a(\cdot,\mathbf{y}) \in C(\overline{D})$ für fast alle $\mathbf{y}\in[-1,1]^M$ gelöst werden. Die Zahl $M \in \mathbb{N}$ entspricht in dieser Modellierung der Dimension des Parametergebiets. Die Diskretisierung bezüglich der Ortsvariable $\mathbf{x} \in D$ erfolgt mit linearen Finiten Elementen. Für die Diskretisierung des Diffusionskoeffizienten nehmen wir an, dass dieser als endliche *Karhunen-Loève-Entwicklung* gemäß

$$\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{M} \psi_i(\mathbf{x}) y_i$$

gegeben ist. Hierbei gelte $\overline{\alpha}, \psi_1, \ldots, \psi_M \in C(\overline{D})$. Die Funktionen $\overline{\alpha}, \psi_1, \ldots, \psi_M$ werden jeweils mittels stückweise konstanter Finiter Elemente diskretisiert, was für jedes feste $\mathbf{y}\in[-1,1]^M$ zu einer stückweise konstanten Darstellung des Diffusionskoeffizienten $a(\cdot,\mathbf{y})$ führt.

Für das Aufstellen der FEM-Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ wird nun einfach der entsprechende Wert des Diffusionskoeffizienten als Integrationsgewicht behandelt. Es gilt

$$a_{i,j} = \sum_{T_k \in \operatorname{supp}\varphi_i} \alpha_k \int_{T_k} \langle \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \nabla\varphi_i(\mathbf{x})\rangle \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Bekanntlich gilt, dass hier der Mittelwert des Diffusionskoeffizienten auf jedem Dreieck zu einer exakten Darstellung der Steifigkeitsmatrix mit linearen Finiten Elementen führt. Im Allgemeinen ist dieser Mittelwert allerdings nicht analytisch bekannt. Daher verwenden wir eine numerische Quadratur zur Approximation das Mittelwerts. Speziell verwenden wir hier die *7-Punkt-Radon-Formel*, die für Polynome von maximalem Grad 5 exakt ist, also bezüglich der Schrittweite h einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^6)$ liefert. Die zugehörigen Stützstellen und Gewichte bezüglich des Einheitssimplex $\Delta = \{\mathbf{x}\in[0,1]^2 : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1 - x_1\}$ sind gegeben durch

x_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
w	$\frac{9}{80}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$

Damit diese Quadraturformel auf beliebigen Dreiecken verwendet werden kann, muss das Integral entsprechend transformiert werden. Es gilt für das Dreieck T_k und die Funktion f gemäss des Transformationssatzes

$$\int_{T_k} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Delta} f\big(\Phi(\mathbf{x})\big) \big|\det\big(\Phi'(\mathbf{x})\big)\big| \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

mit $\Phi\colon \Delta \to T_k$.

Aufgabe 1. Schreiben Sie die Funktion

```
function fquer=const_projection(P,F,@(x) f(x)),
```

die bezüglich der durch die Punktliste $\mathbf{P}$ und die Elementliste $\mathbf{F}$ gegebenen Triangulierung den Mittelwert der Funktion $f(\mathbf{x})$ (gegeben als Function-Handle) auf jedem Dreieck bildet.
Implementieren Sie ferner die Funktion

```
function a=diff_coeff(Psi,aquer,y),
```

die für einen Vektor $\mathbf{y}$ den Diffusionskoeffizienten aus den diskretisierten Funktionen $\boldsymbol{\psi}_i$ (gespeichert in der Matrix $\boldsymbol{\Psi}$) und der diskretisierte Funktion $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ zusammensetzt. Schließlich wird noch die Funktion

```
function A=fem(P,F,b,a),
```

benötigt, welche die FEM-Steifigkeitsmatrix bezüglich des diskretisierten Diffusionskoeffizienten $\mathbf{a}$ bestimmt.

Aufgabe 2. Testen Sie Ihre Implementierung anhand des Poisson-Problems auf dem Einheitsquadrat bezüglich der Daten $f(\mathbf{x}) = 1$ sowie $\psi_i(\mathbf{x}) = 2^{-i}\sin(i\pi x_1)\sin(i\pi x_2)$ und $\overline{\alpha}(\mathbf{x}) = 1$. Die Dimension des Parameterbereichs sei $M = 5$. Das Grobgitter auf dem Einheitsquadrat sollte 5 mal verfeinert werden (Level 5). Bestimmen Sie nun die Lösung $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)$ für 10^4 zufällig gewählte Vektoren $\mathbf{y}_k \in [-1, 1]^5$. Verwenden Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems den \-Solver. Visualisieren Sie anschliessend den Mittelwert der Lösung

$$\overline{u}(\mathbf{x}) = 10^{-4}\sum_{k=1}^{10^4} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k).$$