UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 6.

zu bearbeiten bis **Montag, 7.4.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen)

Gegeben sei die gewöhnliche stochastische Differentialgleichung

$$\dot{y}(t,\omega) = \xi(\omega)y(t,\omega), \quad y(0,\omega) = 1, \quad t \in [0,T].$$

Wir verwenden nun die stochastische Approximation

$$y_M(t,\omega) = \sum_{i=0}^{M} v_i(t)u_i\big(\xi(\omega)\big), \quad v_i : [0,T] \to \mathbb{R}$$

mit den Orthogonalpolynomen $\{u_i\}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies auf ein deterministisches System von Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(M+1)\times(M+1)}, \quad \mathbf{v}(t) = \big(v_0(t), v_1(t), \ldots, v_M(t)\big)$$

führt. Stellen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ explizit auf.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (zweidimensionale Chaospolynome)

Gegeben sei die gewöhnliche stochastische Differentialgleichung

$$\dot{y}(t,\omega) = \big(b_1(t)\xi_1(\omega) + b_2(t)\xi_2(\omega)\big)y(t,\omega), \quad \xi_i \sim \text{UNI}(-1,1).$$

Die zweidimensionale polynomiale Chaosdiskretisierung der Lösung lautet

$$y(t,\omega) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^2} v_{\boldsymbol{\alpha}}(t)u_{\boldsymbol{\alpha}}\big(\boldsymbol{\xi}(\omega)\big), \quad \text{mit} \quad u_{\boldsymbol{\alpha}}\big(\boldsymbol{\xi}(\omega)\big) := u_{\alpha_1}\big(\xi_1(\omega)\big)u_{\alpha_2}\big(\xi_2(\omega)\big).$$

Als stochastische Approximation an die Lösung verwenden wir nun nur die Polynome $u_{\boldsymbol{\alpha}}$ mit $|\boldsymbol{\alpha}| \leq 2$, also

$$y(t,\omega) \approx \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq 2} v_{\boldsymbol{\alpha}}(t)u_{\boldsymbol{\alpha}}\big(\boldsymbol{\xi}(\omega)\big).$$

Führen Sie eine stochastische Galerkin-Diskretisierung zur Bestimmung der Koeffizienten $v_{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ durch, das heisst, bilden Sie

$$\int_\Omega \dot{y}(t,\omega)u_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi}(\omega))dP(\omega) = \int_\Omega \big(b_1(t)\xi_1(\omega) + b_2(t)\xi_2(\omega)\big)y(t,\omega)u_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi}(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)$$

für alle $|\boldsymbol{\beta}| \leq 2$. Stellen Sie explizit das resultierende System von deterministischen Differentialgleichungen auf

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t) = [v_{00}(t), v_{01}(t), v_{02}(t), v_{10}(t), v_{11}(t), v_{20}(t)]^\intercal.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (numerische Lösung von gewöhnlichen SDGLs)

Lösen Sie das System aus Aufgabe 2 für $b_1 \equiv 1$ und $b_2 \equiv 0.5$, indem Sie zur Ortsdiskretisierung ein explizites Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1/4$ durchführen. Bestimmen Sie anschliessend den Erwartungswert und die Varianz der, sowohl in der stochastischen als auch in der zeitlichen Variablen, diskretisierten Lösung. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit dem exakten Erwartungswert und der exakten Varianz.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (allgemeines Eigenwertproblem)

a) Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ symmetrische Matrizen und $\mathbf{B}$ zusätzlich positiv definit. Zeigen Sie, dass das allgemeine Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}$$

auf ein äquivalentes Eigenwertproblem

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

mit einer symmetrischen Matrix $\mathbf{C}$ zurückgeführt werden kann.

b) Auf solch ein allgemeines Eigenwertproblem stossen wir bei der Berechnung von biorthogonalen Polynomen. Diese werden zur Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen mit stochastischen Diffusionskoeffizienten verwendet. Bestimmen Sie zur Dichtefunktion

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

die biorthogonalen Polynome vom Grad 2. Verwenden Sie dazu Aufgabenteil a) für die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit

$$a_{i,j} = \int_{-1}^{1} x L_i(x) L_j(x) \rho(x) \,\mathrm{d}x, \qquad b_{i,j} = \int_{-1}^{1} L_i(x) L_j(x) \rho(x) \,\mathrm{d}x.$$

(4 Punkte)