UNIVERSITÄT BASEL
Numerik stochastischer Differentialgleichungen
Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 5.

zu bearbeiten bis **Montag, 31.3.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Christoffel-Darboux-Identität)

Gegeben seien eine Gewichtsfunktion w auf dem Intervall I und die zugehörigen Orthogonalpolynome $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ in $L_w^2(I)$. Diese genügen bekanntlich einer Dreitermrekursion

$$a_{n+1}u_{n+1}(x) = (x - b_n)u_n(x) - a_n u_{n-1}(x).$$

Für festes $\xi \in \mathbb{R}$ definieren wir das *Kernpolynom* vom Grad n durch

$$K_n(\xi, x) = \sum_{i=0}^{n} u_i(\xi)u_i(x).$$

Zeigen Sie, dass für $x \neq \xi$ die *Christoffel-Darboux-Identität* gilt

$$K_n(\xi, x) = a_{n+1}\frac{u_{n+1}(x)u_n(\xi) - u_n(x)u_{n+1}(\xi)}{x - \xi}.$$

Folgern Sie damit, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$K_n(x, x) = a_{n+1}\big(u'_{n+1}(x)u_n(x) - u_{n+1}(x)u'_n(x)\big).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Trennungseigenschaft der Nullstellen von Orthogonalpolynomen)

Zeigen Sie, dass sich zwischen je zwei Nullstellen von u_{n+1} genau eine Nullstelle von u_n befindet.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Eigenwerte von Jacobi-Matrizen)

Vorgelegt sei die *Jacobi-Matrix*

$$\mathbf{J}_n := \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & & 0 \\ a_1 & b_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeigen Sie die folgende Aussage: Die Nullstellen von u_n stimmen mit den Eigenwerten von $\mathbf{J}_n$ überein. Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{J}_n$ und $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n]^\intercal$ ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$ und $w_1 \geq 0$, dann gilt für alle $k = 1, \ldots, n$, dass $w_k = \gamma u_{k-1}(\lambda)$ mit $\gamma = \big(K_{n-1}(\lambda, \lambda)\big)^{-1/2}$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Gewichte der Gauß-Quadratur)

Die Stützstellen $x_1, \dots, x_n$ der Gauß-Quadratur zu gegebener Gewichtsfunktion w sind bekanntlich die Nullstellen des zugehörigen Orthogonalpolynoms u_n vom Grad n. Bezeichnen wir mit $L_i(x)$ die Lagrange-Polynome zu den Stützstellen, so gilt für die Gewichte der Gauß-Quadratur offensichtlich

$$w_i = \int\limits_I L_i(x) w(x) \, \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass die Gewichte alle positiv sind und sich zudem durch

$$w_i = \big(K_{n-1}(x_i, x_i)\big)^{-1}$$

berechnen lassen. Folgern Sie daraus, dass im Fall einer normierten Gewichtsfunktion (d.h. $\int_I w(x) \, \mathrm{d}x = 1$) gilt

$$w_i = v_{i,1}^2.$$

Hierbei bezeichnet $v_{i,1}$ die erste Komponente des zum Eigenwert x_i der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_n$ gehörigen Eigenvektors.

(4 Punkte)