UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 4.

zu bearbeiten bis **Montag, 24.3.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (gewöhnliche, parameterabhängige Differentialgleichungen)

Wir betrachten die gewöhnliche, parameterabhängige Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\xi x}\frac{\partial}{\partial x}u(x,\xi)\right) = 0, \quad x \in (0,1),$$
$$u(\xi,0) = 0, \quad u(\xi,1) = 1.$$

Bestimmen Sie die Lösung $u(x,\xi)$ dieser Gleichung.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (lognormale Diffusionskoeffizienten)

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben sei ein stochastischer Diffusionskoeffizient der Form $a(\mathbf{x},\omega) = \exp\big(b(\mathbf{x})\psi(\omega)\big)$ mit $b \in L^\infty(D)$ und der standardnormalverteilten Zufallsvariablen $\psi \sim N(0,1)$. Für einen Lastvektor $f \in L^2(D)$ betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\big(a(\mathbf{x},\omega)\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},\omega)\big) &= f(\mathbf{x}) && \text{in } D \\ u(x,\omega) &= 0 && \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Hierin ist der Diffusionskoeffizient nicht gleichmässig elliptisch oder beschränkt. Es gibt also keine Konstanten $a_{\min}, a_{\max} > 0$, so dass $a_{\min} \leq a(\mathbf{x},\omega) \leq a_{\max}$ ist für fast alle $(\mathbf{x},\omega) \in D \times \Omega$. Allerdings liegt für jedes fixierte $\omega \in \Omega$ einfach eine elliptische Differentialgleichung vor. Weisen Sie nach, dass die Lösung $u(\mathbf{x},\omega)$ dieser Gleichung für alle $q \in \mathbb{N}$ in $L^q_P\big(\Omega, H^1_0(D)\big)$ liegt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Nichtbeschränkheit von Lösungen lognormaler Diffusionsgleichungen)

Betrachten Sie das Randwertproblem aus Aufgabe 2 für $D = (0,1)$, $f \equiv 2$ und $b(x) \equiv 1$. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung nicht essentiell beschränkt ist, also für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$P\big(\{\omega \in \Omega : \|u(\omega)\|_{L^\infty(D)} > c\}\big) > 0.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Nullstellen von Orthogonalpolynomen)

Beweisen sie, dass die Nullstellen der Legendre-Polynome alle einfach sind und in $(-1,1)$ liegen.

Hinweis. Beweisen Sie die Aussage per Widerspruch und verwenden Sie, dass das Legendre-Polynom vom Grad n orthogonal auf dem Polynomraum Π_{n-1} steht.

(4 Punkte)