UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

UNI BASEL

Übungsblatt 3. zu bearbeiten bis **Montag, 17.3.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Tensorprodukte von Hilbert-Räumen)

Gegeben seien zwei reelle Hilbert-Räume H_1 und H_2 ausgestattet mit den Innenprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2}$. Für $\phi \in H_1$ und $\psi \in H_2$ definieren wir uns die Bilinearform $\phi \otimes \psi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ durch

$$(\phi \otimes \psi)(v, w) = \langle \phi, v\rangle_{H_1} \langle \psi, w\rangle_{H_2}, \quad (v, w) \in H_1 \times H_2.$$

Der Tensorproduktraum $H_1 \otimes H_2$ ist dann definiert als die Vervollständigung solcher Bilinearformen bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle \phi_1 \otimes \psi_1, \phi_2 \otimes \psi_2\rangle_{H_1\otimes H_2} := \langle \phi_1, \phi_2\rangle_{H_1} \langle \psi_1, \psi_2\rangle_{H_2}.$$

Seien $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ jeweils Orthonormalbasen von H_1 und H_2. Zeigen Sie, dass $\{\phi_i \otimes \psi_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis, also ein vollständiges Orthonormalsystem, von $H_1 \otimes H_2$ bilden.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Orthonormalbasen von Hilbert-Räumen)

Wir betrachten zwei separable Massräume $(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$ mit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$. Wie wir wissen, sind die Räume $L^2_{P_1}(\Omega_1)$ und $L^2_{P_2}(\Omega_2)$ separable Hilbert-Räume. Seien $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{\psi_j(\mathbf{y})\}_{j\in\mathbb{N}}$ die Orthonormalbasen von $L^2_{P_1}(\Omega_1)$ und $L^2_{P_2}(\Omega_2)$. Zeigen Sie, dass $\{\phi_i(\mathbf{x})\psi_j(\mathbf{y})\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2_{P_1\otimes P_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ bilden.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Identifizierung von Tensorprodukträumen)

Weisen Sie mit Hilfe der vorangegangenen Aufgaben nach, dass die Räume $L^2_{P_1\otimes P_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und $L^2_{P_1}(\Omega_1) \otimes L^2_{P_2}(\Omega_2)$ isometrisch isomorph sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (universelle Eigenschaft von Tensorprodukten)

Das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen über demselben Grundkörper kann bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert werden durch die *universelle Eigenschaft.* Im Falle von reellen Hilbert-Räumen H_1, H_2 besagt diese, dass es eine *schwache Hilbert-Schmidt-Abbildung* $p : H_1 \times H_2 \to H_1 \otimes H_2$ gibt, so dass zu jeder bilinearen, beschränkten Abbildung $h : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ genau eine lineare, beschränkte Abbildung $g : H_1 \otimes H_2 \to \mathbb{R}$ existiert mit $h = g \circ p$. Weisen Sie die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt von zwei Hilbert-Räumen nach.

Hinweis. Eine beschränkte und bilineare Abbildung $p : H_1 \times H_2 \to H_1 \otimes H_2$ heisst schwache Hilbert-Schmidt-Abbildung, falls für alle $h \in H_1 \otimes H_2$ die Abbildung $p_h : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ mit $p_h(x_1, x_2) := \langle p(x_1, x_2), h \rangle_{H_1 \otimes H_2}$ ein *Hilbert-Schmidt-Funktional* ist, das ist eine bilineare, beschränkte Abbildung, so dass für Orthonormalbasen $\{\phi_i\}_{i \in I}$ von H_1 und $\{\psi_j\}_{j \in J}$ von H_2 gilt

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_h(\phi_i, \psi_j)^2 < \infty.$$

(4 Punkte)