Übungsblatt 12.

zu bearbeiten bis **Montag, 26.5.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (hierarchischer Interpolant)

a) Gegeben sei die Parabel $p(x) = 4x(1-x)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\{\beta_{\ell,k}\}$ des hierarchischen Interpolanten

$$p_j(x) = \sum_{\ell=0}^{j} \sum_{k\in\nabla_\ell} \beta_{\ell,k}\varphi_{\ell,k}(x)$$

aus dem Raum der stückweise linearen Funktionen

$$V_j = \big\{f \in C([0,1]) : f\,|_{[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]} \in \Pi_1 \text{ für alle } k = 0,1,\ldots,2^j-1\big\}.$$

b) Gegeben sei das Tensorprodukt $f(x,y) = p(x)p(y)$ der Parabel. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\beta_{(\ell_x,k_x),(\ell_y,k_y)}$ des bilinearen hierarchischen Interpolanten

$$f_j(x,y) = \sum_{\ell_x\ell_y\le j} \sum_{k_x\in\nabla_{\ell_x}} \sum_{k_y\in\nabla_{\ell_y}} \beta_{(\ell_x,k_x),(\ell_y,k_y)}\varphi_{\ell_x,k_x}(x)\varphi_{\ell_y,k_y}(y) \in V_j\otimes V_j.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Kontrollvariable)

Eine Möglichkeit der Varianzreduktion in der Monte-Carlo-Quadratur zur Bestimmung des Integrals $\int_{\mathbf{I}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ ist die Verwendung von *Kontrollvariablen.* Mit Hilfe einer Funktion g, deren Integralwert bekannt ist, lässt sich das Integral umschreiben gemäss

$$\int_{\mathbf{I}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbf{I}} \big(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\mathbf{I}} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Somit muss man lediglich eine Monte-Carlo-Quadratur für das erste Integral auf der rechten Seite bestimmen. Zeigen Sie, dass nun die Varianz von $f-g$ in den Fehler der Monte-Carlo-Quadratur eingeht. Bestimmen Sie die Varianzreduktion anhand des Beispiels der Funktion $f(x) = 4x(1-x)$ und der Kontrollvariablen $g(x) = \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $I = [0,1]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Multilevel-Monte-Carlo-Verfahren I)

Gegeben sei für $f \in C^2([0,1]^2)$ die Funktion

$$u(x) := \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Weiterhin sei $\{\triangle_\ell\}_\ell$ eine Hierarchie von äquidistanten Zerlegungen von $[0,1]$, das heisst $\triangle_\ell = \{x_{\ell,i} = i/2^\ell : i = 0,\dots,2^\ell\}$, und $\{\varphi_{\ell,i}(x)\}_{i=0}^{2^\ell}$ die Menge der zugehörigen nodalen Hütchenfunktionen. Wir approximieren nun u gemäss

$$u(x) \approx (P_L u)(x) = \sum_{i=0}^{2^L} u(x_{L,i})\varphi_{L,i}(x).$$

Zur Approximation der Integrale $u(x_{L,i})$ verwenden wir die Monte-Carlo-Quadratur. Hierzu seien $\{\xi_{L,i}\}_{i=1}^{N_L}$ unabhängige, uniform verteilte Zufallsvariablen auf $[0,1]$. Dann folgt

$$u(x) \approx u_L(x) = \frac{1}{N_L}\sum_{j=1}^{N_L}\big(P_L f(\cdot,\xi_{L,j})\big)(x).$$

Zeigen Sie, dass für den mittleren quadratischen Fehler

$$e_L = \mathbb{E}[\|u-u_L\|_{L^2}^2] = \mathcal{O}(N_L^{-1} + 2^{-2L})$$

gilt. Dies bedeutet, dass $N_L = 2^{2L}$ Samples auf einen mittleren quadratischen Fehler von $\mathcal{O}\big(2^{-2L}\big)$ führen. Bestimmen sie den Aufwand für die Berechnung von u_L. Nehmen Sie hierzu an, dass eine Funktionsauswertung von f in $\mathcal{O}(1)$ Operationen durchgeführt werden kann.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Multilevel-Monte-Carlo-Verfahren II)

Offensichtlich kann der Interpolationsoperator P_L als Teleskopsumme dargestellt werden:

$$P_L = \sum_{\ell=0}^{L}(P_\ell - P_{\ell-1}) \quad \text{mit } P_{-1} = 0.$$

Folglich gilt

$$u_L = \sum_{\ell=0}^{L}\frac{1}{N_L}\sum_{j=1}^{N_L}(P_\ell - P_{\ell-1})f(\cdot,\xi_{L,j}).$$

Lassen wir nun auf jedem Level ℓ eine unterschiedliche Anzahl an Quadraturpunkten zu, so erhalten wir den Multilevel-Monte-Carlo-Schätzer von u gemäss

$$\hat{u}_L = \sum_{\ell=0}^{L}\frac{1}{N_\ell}\sum_{j=1}^{N_L}(P_\ell - P_{\ell-1})f(\cdot,\xi_{\ell,j}).$$

Zeigen sie, dass die Wahl $N_\ell = 2^{2(L-\ell)}$ auf den mittleren quadratischen Fehler

$$\hat{e}_L = \mathbb{E}[\|u-\hat{u}_L\|_{L^2}^2] = \mathcal{O}(L2^{-2L})$$

führt. Wie hoch ist der Aufwand für die Berechnung von $\hat{u}_L$?

(4 Punkte)