UNIVERSITÄT BASEL

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Frühjahrssemester 2014
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 11.

zu bearbeiten bis **Montag, 19.5.2014, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Varianzreduktion in Monte-Carlo-Verfahren)

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Wir betrachten die Monte-Carlo-Simulation zur Approximation des Erwartungswertes λ von X. Die *Samples* von X lassen sich konstruieren durch

$$X_i = \frac{1}{\lambda}\log(U_i),$$

wobei $U_i \sim \mathrm{UNI}([0,1])$ Auswertungen von unabhängig und identisch, uniform verteilten Zufallsvariablen auf $[0,1]$ sind. Der Monte-Carlo-Schätzer für den Erwartungswert lautet dann

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Die Varianz dieses Monte-Carlo-Schätzers geht bekanntlich in die Konvergenz der Quadratur ein. Zeigen Sie, dass sich die Varianz des Schätzers verringern lässt, indem man die Samples X_i durch die Samples Y_i ersetzt, wobei Y_i gegeben ist durch

$$Y_i = \frac{1}{2\lambda}\big(\log(U_i) + \log(1-U_i)\big).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Importance Sampling)

Eine Methode zur Varianzreduktion bei Monte-Carlo-Verfahren ist das *Importance Sampling*. Grob gesagt wird bei dieser Methode die Dichte, bezüglich derer eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt wird, derart geändert, dass die modifizierte Dichte gross ist, wo der Integrand gross ist, und klein ist, wo der Integrand kleine Werte hat. Dieses Vorgehen lässt sich durch die Integraltransformation

$$\int_I f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_I h(x)\frac{\rho(x)}{\mu(x)}\mu(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \tilde{f}(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$$

beschreiben. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = 10\exp(-5|x-2|)$ und eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X. Zu bestimmen Sei der Erwartungswert

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\exp^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x.$$

Wir verwenden hierfür einen Monte-Carlo-Schätzer, der m zufällige, standardnormalverteilte Realisierungen von X mittelt. Wie verändert sich die Varianz des Schätzers, falls ein Importance Sampling bezüglich der Dichtefunktion $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-(x-2)^2/2)$ durchgeführt wird?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Funktionen mit exponentiell wachsender Varianz)

Aus der Vorlesung wissen wir, dass das Monte-Carlo-Verfahren dimensionsunabhängig konvergiert. Die Varianz, die in die Fehlerabschätzung eingeht, kann aber durchaus mit der Dimension exponentiell wachsen. Zeigen Sie dies anhand des einfachen Beispiels

$$f(\mathbf{X}) = \prod_{k=1}^{m} 2X_i$$

mit auf $[-1, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen X_i.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Momentengleichungen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten die Poisson-Gleichung mit stochastischer rechter Seite

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \omega) &= f(\mathbf{x}, \omega) && \text{in } D \times \Omega \\ u(\mathbf{x}, \omega) &= 0 && \text{auf } \partial D \times \Omega. \end{aligned}$$

Die Zwei-Punkt-Korrelation von f sei gegeben durch $\operatorname{Cor}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\mathbf{x})\alpha_i(\mathbf{y})$ mit gewissen Funktionen $\alpha_i \in L^2(D)$. Zeigen Sie, dass die Zwei-Punkt-Korrelation von u dann gegeben ist durch $\operatorname{Cor}_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(\mathbf{x})\beta_i(\mathbf{y})$, wobei die $\beta_i \in H_0^1(D)$ der Poisson-Gleichung

$$-\Delta\beta_i = \alpha_i \text{ in } D, \quad \beta_i = 0 \text{ auf } \partial D$$

genügen.

(4 Punkte)