Serie 10

Quadratur

zur 20. KW (16.05.–20.05.2022)

Aufgabe 10.1 (2 Punkte): Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Für was braucht man die Quadratur?

b) Was ist die Idee einer summierten Quadraturregel?

c) Wie kommt man auf die Formel für die summierte Simpson-Regel aus der Beilage?

d) Was ist die Idee der adaptiven Quadratur?

Aufgabe 10.2 (2+2 Punkte):

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion

`QS = quad_simpson(f,a,b,N)`,

die eine numerische Approximation $Q_S(N)$ des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit der summierten Simpson-Regel für N Teilintervalle berechnet. Eine kurze Beschreibung der Simpson-Regel befindet sich in der Beilage. Dabei soll deine Funktion **ohne** `for`- oder `while`-Schleifen auskommen und die Funktion `f` soll als function handle übergeben werden.

b) Bestimme numerisch die Näherungen $Q_S(N_i)$ des Integrals

$$\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}$$

für $N_i = 2^i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Zeichne den absoluten Fehler $e_S(N_i) = |\frac{\pi}{3} - Q_S(N_i)|$ bezüglich N_i auf einer log-log-Skala (MATLAB-Befehl: `loglog`). Trage auch die Geraden durch die Punkte (N_i, N_i^{-4}) und $(N_i, N_i^{-5}), i = 1, \ldots, 10$, ein. Füge einen Titel und eine Legende hinzu. Was beobachtest du? Stimmt deine Beobachtung mit der Theorie überein?

Aufgabe 10.3 (2+1+1 Punkte):

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion

```
IA = quadadapt(f,a,b,fa,fb,tol),
```

die eine numerische Approximation des Integrals

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

mit Genauigkeit `tol` berechnet. Die Funktionswerte `fa = f(a)` und `fb = f(b)` sollen ebenfalls übergeben werden, sodass das Programm mit möglichst wenig Funktionsauswertungen auskommt. Benutze eine adaptive "divide and conquer"-Strategie (siehe Beilage), um die Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle automatisch dem Verhalten des Integranden anzupassen.

Zur numerischen Approximation des Integrals soll auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ die Trapezregel $I_T(x_i, x_{i+1})$ benutzt werden, während der Fehler durch $|I_S(x_i, x_{i+1}) - I_T(x_i, x_{i+1})|$ geschätzt wird. Dabei sei $I_S(x_i, x_{i+1})$ eine Approximation des Integrals auf dem Teilintervall durch die Simpson-Regel. Die Funktion f wird als Function-handle `f` übergeben.

b) Berechne das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

mit `tol` $= 10^{-8}$ und gib den absoluten Fehler aus.

c) Was passiert, wenn du versuchst, das Integral

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

zu berechnen? Wie erklärst du dir das Resultat?

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
`http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumII/praktikumII.html`