J. Bopp, A. Bot, R. Dorau, M. Fallahpour, A. Heinimann, F. Kruse

Serie 7

Spline-Interpolation

zur 17. KW (25.04.–29.04.2022)

Aufgabe 7.1 (1 Punkt): Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Was ist die Idee des natürlichen kubischen Splines?

b) Wie sieht der natürliche kubische Spline $s(z)$ auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ aus?

Aufgabe 7.2 (2+2+1 Punkte): Es soll der kubische natürliche Spline $s(x)$ zu den Punkten (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$ berechnet werden. Dieser Spline ist stückweise definiert, d.h. für $z \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt $s(z) = s_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$. Dabei ist $s_i(z)$ folgendermassen definiert:

$$s_i(z) = A_i + (z - x_{i-1})B_i + (z - x_{i-1})^2(z - x_i)C_i + (z - x_{i-1})(z - x_i)^2 D_i.$$

Die Formeln zur Berechnung der Koeffizienten A, B, C und D stehen in der Beilage.

a) Schreibe eine MATLAB-Funktion `K = spline_koeff(x,y)`, welche diese Koeffizienten für gegebene Stützpunkte (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, berechnet. Dabei sollen `x` und `y` Spaltenvektoren sein. Die Spalten der Matrix `K` sind die Vektoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ (MATLAB: `K = [A B C D];`). **Dieses Programm soll ohne for-Schleifen auskommen!**

   Berechne im Programm nacheinander: die Schrittweite h und die dividierten Differenzen $f[x_i, x_{i-1}]$. Dies sind beides Vektoren der Länge n (hier ist der Befehl `diff` sehr nützlich). Berechne danach die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix $\mathbf{M}$, den Vektor $\mathbf{d}$ (Länge $n+1$) und damit den Vektor der Steigungen $\mathbf{p}$ (ebenfalls Länge $n+1$). Für das Aufstellen der Matrix ist der Befehl `diag` sehr nützlich. Auch der Befehl `end` kann nützlich sein. Nun können alle Koeffizienten $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ (alles Vektoren der Länge n) berechnet und zusammengefasst werden.

b) Schreibe eine weitere Matlab-Funktion `s = spline_interpol(K,x,z)`, die den Spline s an der Stelle z auswertet. Dabei soll `z` auch ein Vektor sein können. Eine Vorlage zu dieser Funktion findest du auf der Webseite.

c) Teste deine Programme.

   i) Wie lauten die Koeffizienten des Splines s durch die Stützpunkte $(0, 1)$, $(0.5, -1)$ und $(1, 0.5)$?
   (Antwort: $\mathbf{A} = [1, -1]^\mathsf{T}$, $\mathbf{B} = [-4, 3]^\mathsf{T}$, $\mathbf{C} = [14, 7]^\mathsf{T}$ und $\mathbf{D} = [-7, -14]^\mathsf{T}$)

ii) Bestimme $s(z)$ an den Stellen $z = 0.2$, $z = 0.4$, $z = 0.6$ und $z = 0.8$. (Antwort: $s(0.2) \approx -0.09$, $s(0.4) \approx -0.85$, $s(0.6) \approx -0.95$, und $s(0.8) \approx -0.39$).

Aufgabe 7.3 (2+2 Punkte): Zu einer gegebenen Folge von Punkten (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, in der Ebene soll eine interpolierende glatte Kurve $\gamma(t) := (s_x(t), s_y(t))$ durch diese Punkte konstruiert werden. Dabei sind s_x und s_y eingespannte Splines mit den Stützstellen (t_k, x_k) bzw. (t_k, y_k). Die Stützknoten t_k sind auf folgende Weise durch die Distanzen zwischen den aufeinanderfolgenden Punkten (x_k, y_k) festgelegt:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 0 \\
t_k &= t_{k-1} + \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad k = 2, \ldots, n\,.
\end{aligned}
$$

Um die Kurve $\gamma(t)$ zu zeichnen, bestimmt man für $t \in [t_1, t_n]$ die eingespannten Splines $s_x(t)$ und $s_y(t)$ durch die Stützstellen (t_k, x_k) bzw. (t_k, y_k) und plottet die Punktepaare $(s_x(t), s_y(t))$ mit $t \in [t_1, t_n]$.

a) Lade die Datei `Points.dat` von der Webseite herunter. Sie beschreibt eine Punktfolge (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$. Schreibe ein Matlab-Skript `plot_curve_spline`, das die interpolierende glatte Kurve $\gamma(t)$, $t \in [t_1, t_n]$ (Schrittweite 0.1), durch diese Punkte zeichnet. Zur Spline-Interpolation kannst du den Matlab-Befehl `spline` verwenden (siehe Beilage). Ein Skelett des Codes findest du auf der Webseite.

b) Schreibe ein Matlab-Skript `plot_surprise` zum Zeichnen der Überraschung, die wir vorbereitet haben. Das Überraschungsbild besteht aus den interpolierenden glatten Kurven durch die Punkte, die in der Datei `PointsSurprise.dat` beschrieben ist. Die Anzahl der Punkte, die durch eine Kurve interpoliert werden sollen, ist in der Datei `NPointsSurprise.dat` gegeben, d.h. `NPointsSurprise(i)` ist die Anzahl der Punkte, welche durch die i-te Kurve interpoliert werden. Ein Skelett des Codes kannst du von der Webseite herunterladen.

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
`http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumII/praktikumII.html`