

Serie 5

Newton-Interpolation in 2D

zur 14. KW (4.4.–8.4.2022)

Aufgabe 5.1 (2 Punkte): Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

- Was ist die Idee der zweidimensionalen Newton-Interpolation auf dem Einheitsquadrat?
- Wie sehen die Polynome $p_j(x) = \sum \dots$ von der Beilage aus?
- Berechne für die Stützpunkte $(\eta_j, p_j(x))$, $j = 0, 1, 2$, die dividierten Differenzen $g[\eta_0, \eta_1]$ und $g[\eta_1, \eta_2]$. Setze dazu $g[\eta_j] = p_j(x)$, $j = 0, 1, 2$. Dabei soll $p_j(x)$ die Darstellung aus Teilaufgabe b) haben.

Aufgabe 5.2 (2+2+2+2 Punkte): Wir wollen die Newton-Polynominterpolation auf dem Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ implementieren (siehe Beilage).

- Schreibe eine Funktion

```
C = newton_koeff_2D(xi, eta, F),
```

die die Koeffizienten des zweidimensionalen Interpolationspolynoms bestimmt. Dazu müssen die dividierten Differenzen wie im eindimensionalen Fall (siehe Serie 4) zunächst für jede Zeile von \mathbf{F} und dann für jede Spalte von \mathbf{F} berechnet werden.

- Schreibe eine Funktion

```
V = newton_interpol_2D(xi, eta, C, x, y),
```

die das zweidimensionale Interpolationspolynom im Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auswertet. Deine Funktion `newton_interpol_2D` darf die Funktion `newton_interpol` aus Serie 4 aufrufen.

- Lade die Datei `F.txt` von der Webseite in Matlab mit `load('F.txt')`. Diese Datei enthält Stützwerte $\mathbf{F} = [f(\xi_i, \eta_j)]_{j,i}$ einer Funktion f zu äquidistanten Stützstellen $(\xi_i, \eta_j) \in [0, 1]^2$ für $i = 0, \dots, 3$ und $j = 0, \dots, 5$. Bestimme zuerst die Koeffizienten \mathbf{C} . Werte nun dein Interpolationspolynom an den Stellen

$(x, y) = (0, 0), (0.01, 0), \dots, (1, 0), (0.01, 0), \dots, (0.01, 1), \dots, (1, 1)$ aus. Dabei kannst du wie folgt vorgehen:

```
x = [0:100]/100;
[X,Y] = meshgrid(x);
V = zeros(101);
for j = 1:101
    for i = 1:101
        V(j,i) = newton_interpol_2D(xi,eta,C,X(j,i),Y(j,i));
    end
end
```

Zeichne dann mit `surf(X,Y,V)` deine Interpolierte. Vergleiche dein Resultat mit dem Plot in Abbildung 1.

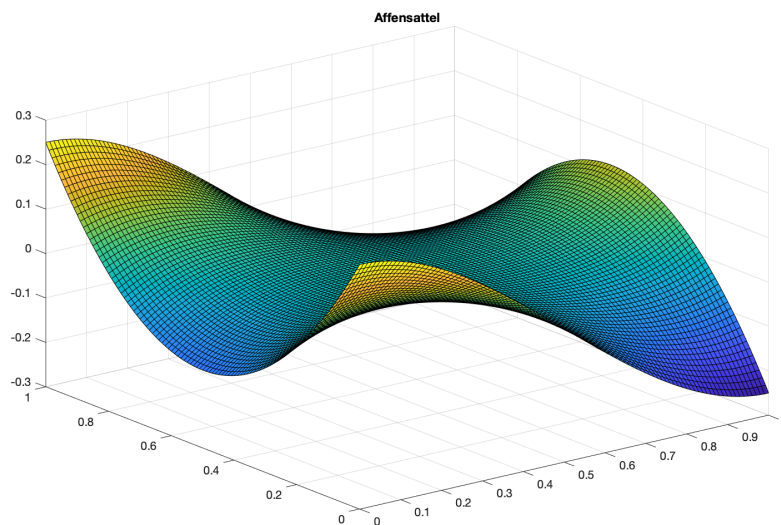


Abbildung 1: Affensattel.

- d) In dieser Aufgabe wollen wir den Interpolationsfehler zu verschiedenen Stützstellen visualisieren. Dazu betrachten wir die Funktion $f(x, y) = \exp(-(x-y)^2)$ mit $m = n = 9$ einmal für äquidistante Stützstellen in $[0, 1]^2$ und einmal für die Chebyshev-Knoten $x_k = (1 + \cos(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi))/2$ für $k = 0, \dots, n$. Bestimme jeweils die Stützwerte \mathbf{F} .

Bestimme in beiden Fällen die Koeffizienten \mathbf{C} und werte anschliessend das Polynom wieder an denselben Stellen (x, y) wie in Teilaufgabe c) aus. Dies gibt dir jeweils eine Matrix \mathbf{V} . Speichere in einer Matrix \mathbf{Fref} die korrekten Werte der Auswertung der Funktion $f(x, y)$ an den Stützstellen (x, y) aus Teilaufgabe c). Nun kann der Interpolationsfehler mit `norm(V(:)-Fref(:), 'inf')` berechnet werden. Für welche Wahl der Stützstellen ist der Fehler kleiner? Visualisiere jeweils den punktwisen Fehler `abs(V-Fref)` und zeichne die Funktion $f(x, y)$. Dabei ist der Befehl `surf` hilfreich.