J. Bopp, A. Bot, R. Dorau, M. Fallahpour, A. Heinimann, F. Kruse

---

Serie 4

Horner-Schema und Polynominterpolation

zur 13. KW (28.03.–01.04.2022)

Aufgabe 4.1 (1 Punkt): Lies die Beilage sorgfältig durch und beantworte folgende Fragen:

a) Was ist die Idee der Polynominterpolation?

b) Wie sieht eine allgemeine Darstellung eines Polynoms p aus?

c) Du möchtest die Funktion $p(z) = mz + q$ mit $m, q \in \mathbb{R}$, die durch die Punkte $(0, 3)$ und $(1, -1)$ geht, bei $z = 0.3$ auswerten. Wie gehst du vor?

d) Wozu und weshalb wird das Horner-Schema gebraucht?

Aufgabe 4.2 (2+1 Punkte):

a) Schreibe zwei MATLAB-Funktionen

`a = monomial_coeff(x,y)` und `p = monomial_interpol(a,z)`.

Die Funktion `monomial_coeff` soll die Koeffizienten, welche in der monomialen Darstellung vorkommen, berechnen. Die Funktion `monomial_interpol` soll den Wert des Interpolationspolynoms p an einer beliebigen Stelle z mit Hilfe dieser Koeffizienten auswerten. Es soll auch möglich sein, z als Vektor zu übergeben. Benutze ausserdem das Horner-Schema, um das Interpolationspolynom auszuwerten (siehe Beilage).

b) Teste deine Programme:

i) Was sind die (monomialen) Koeffizienten des Interpolationspolynom p durch die Stützpunkte $(-2, -3)$, $(-1, -51)$, $(1, 33)$ und $(2, -3)$?
(Antwort: $a_0 = -11$, $a_1 = 56$, $a_2 = 2$ und $a_3 = -14$)

ii) Was ist $p(\mathbf{z})$ für $\mathbf{z} = (-5, -2, 0, 1, 3, 4, 6)$?
(Antwort: $p(\mathbf{z}) = (1509, -3, -11, 33, -203, -651, -2627)$)

Aufgabe 4.3 (1+1 Punkte):

a) Schreibe zwei MATLAB-Funktionen

`c = newton_koeff(x,y)` und `p = newton_interpol(c,x,z)`.

Die erste Funktion sollte die Koeffizienten der Newton-Interpolation berechnen. Die zweite Funktion sollte mit der Newtonschen Interpolationsformel den Wert des Interpolationspolyoms p durch die Stützpunkte (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, an der Stelle $z \in \mathbb{R}$ berechnen. Es soll wiederum möglich sein, z als Vektor zu übergeben.

b) Teste deine Programme:

i) Was sind die Newton Koeffizienten des Interpolationspolynoms p durch die Stützpunkte $(-2, -3)$, $(-1, -51)$, $(1, 33)$ und $(2, -3)$?
(Antwort: $c_0 = -3$, $c_1 = -48$, $c_2 = 30$ und $c_3 = -14$)

ii) Was ist $p(\mathbf{z})$ für $\mathbf{z} = (-5, -2, 0, 1, 3, 4, 6)$?
(Antwort: siehe A4.2 b) (ii))

Aufgabe 4.4 (1+1+1+1 Punkte): Wir stellen uns in dieser Aufgabe vor, dass es in MATLAB keine Funktion gibt, um den Cosinus zu berechnen. Daher müssen wir unsere eigene Cosinus-Funktion schreiben, wobei wir annehmen, dass wir zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in $[0, 2\pi]$ die Werte $y_i := \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ kennen.

a) Schreibe drei MATLAB-Funktionen, die eine Approximation für den Cosinus liefern. (Dazu kannst du entweder die Monomiale Interpolation aus Aufgabe 2 oder die Newton-Interpolation aus Aufgabe 3 verwenden.) Die Funktionen sollen auch Vektoren als Eingabe akzeptieren.

i) Die Funktion `p_1 = approx_cos_1(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	1	0	-1	0	1

benutzen.

ii) Die Funktion `p_2 = approx_cos_2(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2π
y_i	1	$1/2$	$-1/2$	-1	$-1/2$	$1/2$	1

benutzen.

iii) Die Funktion `p_3 = approx_cos_3(z)` soll die Stützstellen

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
y_i	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1

benutzen.

b) Zeichne die drei Approximationen der Cosinus-Kurve für $z \in [0, 2\pi]$ (Schrittweite $^{\pi}/_{100}$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Zeichne danach die Approximationen der Cosinus-Kurve für $z \in [-\pi, 3\pi]$ (Schrittweite $^{\pi}/_{100}$) in ein Bild. Benutze `legend`, um den Bildern eine Legende hinzuzufügen und gib ihnen mit `title` eine Überschrift. Was fällt dir auf?

c) Um unsere Approximation auch für $z \notin [0, 2\pi]$ sinnvoll gebrauchen zu können, nutzen wir die Periodizität der Cosinus-Funktion aus: Modifiziere deine Funktionen aus Teil a) so, dass z auf ein $\tilde{z} \in [0, 2\pi]$ abgebildet wird mit $\cos(z) = \cos(\tilde{z})$, bevor die eigentliche Approximation berechnet wird. Dabei hilft der MATLAB-Befehl `mod`.

d) Zeichne, mit der Modifikation aus c), die drei Approximationen $p_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, für $z \in [-2\pi, 4\pi]$ (Schrittweite $^{\pi}/_{100}$) sowie die exakte Lösung in ein Bild. Beschrifte die Bilder wiederum mit einer Überschrift und einer Legende. Zeichne auch den absoluten Fehler $|p_i(z) - \cos(z)|$, $i = 1, 2, 3$, in ein Bild. Benutze zuerst wie gewohnt den Befehl `plot`, und dann den Befehl `semilogy`. Beschrifte die Bilder wiederum mit einer Überschrift und einer Legende. Welche der drei Approximationen ist am besten?

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
`http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumII/praktikumII.html`