Beilage zur Serie 11

Newton-Verfahren

Um eine Gleichung der Form

$$f(x) = 0$$

für eine möglicherweise nichtlineare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ numerisch zu lösen, kann man das Newton-Verfahren benutzen. Sei eine Approximation x_n für eine Nullstelle $x^\star$ der Funktion $f \in C^2(a, b)$ gegeben, mit $f'(x^\star) \neq 0$. Wir suchen jetzt eine bessere Approximation x_{n+1}. Dazu linearisieren wir die Funktion f um den Punkt x_n:

$$y(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

In der Nähe von x_n stimmt die Funktion y mit der Funktion f überein und wir erwarten deshalb, dass die Nullstelle von f in der Nähe der Nullstelle von y liegt. Also definieren wir die verbesserte Approximation als Nullstelle der Funktion y:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Diese Iterationsvorschrift wird als Newton-Verfahren bezeichnet. Das Verfahren konvergiert quadratisch, falls der Startwert x_0 genügend nahe bei $x^\star$ liegt:

$$|x^\star - x_{n+1}| \leq C|x^\star - x_n|^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$