Praktikum II “Numerik am Computer” FS 2022
Prof. Dr. H. Harbrecht Universität Basel
J. Bopp, A. Bot, R. Dorau, M. Fallahpour, A. Heinimann, F. Kruse

Beilage zur Serie 8

Zweidimensionale Spline-Interpolation

Ein eindimensionaler kubischer B-Spline zu ganzzahligen Knoten auf dem Intervall $[0, n]$ ist gegeben durch

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i B_3(x - i), \tag{1}$$

mit Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und

$$B_3(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (2 - |x|)^3 - 4(1 - |x|)^3, & |x| \leq 1, \\ (2 - |x|)^3, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Bemerkung: $B_3(x)$ ist der natürliche kubische Spline, der die Knotenpunkte $(-2, 0)$, $(-1, 1/6)$, $(0, 2/3)$ und $(1, 1/6), (2, 0)$ interpoliert.
Die Interpolationsaufgabe zu den $n + 1$ Knotenpunkten $(0, y_0), \ldots, (n, y_n)$ mit natürlichen Randbedingungen, sprich die Bestimmung der $n + 3$ Koeffizienten α_i in (1), $i = -1, 0, 1, \ldots, n + 1$, führt demnach auf ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \widetilde{\mathbf{y}}$, mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In zwei Dimensionen haben wir ein Gitter durch $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ mit Knotenwerten $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ gegeben, i.e. an jeder Stützstelle $(\mathbf{x}^1(i, j), \mathbf{x}^2(i, j)) \in \mathbb{R}^2$ ist der Stützwert $\mathbf{y}(i, j) \in \mathbb{R}$ gegeben, $i, j = 1, \ldots, n + 1$. Durch die Tensorproduktkonstruktion

$$s(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{j=-1}^{n+1} \alpha_{i,j} B_3(\mathbf{x}^1 - i) B_3(\mathbf{x}^2 - j) \tag{2}$$

erhält man eine Spline-Funktion auf dem Quadrat $[0, n]^2$, welche diese Stützpunkte interpoliert. Dabei ist das Produkt

$$B_3(\mathbf{x}^1 - i) B_3(\mathbf{x}^2 - j)$$

in (2) komponentenweise zu verstehen.
Definiert man

$$\widetilde{\mathbf{y}} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{y} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

erhält man die Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{(n+3)\times(n+3)}$ durch Lösen des Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec}(\boldsymbol{\alpha}) = \operatorname{vec}(\widetilde{\mathbf{y}}).$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ das Kronecker-Produkt der Matrix $\mathbf{A}$ mit sich selbst. Das Kronecker-Produkt zweier Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ ist definiert als

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} \dots a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots \ddots \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} \dots a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

wobei $C \in \mathbb{R}^{mp\times rn}$ wieder eine Matrix ist.
$\operatorname{vec}(\mathbf{v})$ entspricht einem Untereinanderschreiben der Spalten der Matrix $\mathbf{v}$. Diese Operationen können in MATLAB mit `kron(A,A)` und `reshape` ausgeführt werden.

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
`http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumII/praktikumII.html`