Praktikum II "Numerik am Computer" FS 2022
Prof. Dr. H. Harbrecht Universität Basel
J. Bopp, A. Bot, R. Dorau, M. Fallahpour, A. Heinimann, F. Kruse

Beilage zur Serie 7

Kubische Splines

Splines

Im Folgenden findest du eine kurze Zusammenstellung über den natürlichen kubischen Spline. Hier sind vor allem die Formeln zu seiner Berechnung aufgeführt.
Zu den Stützpunkten (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, sei $s(x)$ der natürliche kubische Spline, der durch diese Punkte geht. Der Spline $s(x)$ ist stückweise auf den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, definiert. Die Einschränkung von s auf ein Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ist ein kubisches Polynom, das wir mit s_i bezeichnen. Für $z \in [x_{i-1}, x_i]$ ist also $s(z) = s_i(z)$. Speziell gilt

$$s_i(z) = A_i + (z - x_{i-1})B_i + (z - x_{i-1})^2(z - x_i)C_i + (z - x_{i-1})(z - x_i)^2 D_i,$$

wobei

$$A_i = y_{i-1}, \qquad C_i = \frac{p_i - f[x_i, x_{i-1}]}{h_{i-1}^2},$$

$$B_i = f[x_i, x_{i-1}], \qquad D_i = \frac{p_{i-1} - f[x_i, x_{i-1}]}{h_{i-1}^2}.$$

Dabei wurde die Notation

$$f[x_i, x_{i-1}] := \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad \text{und} \quad h_{i-1} := x_i - x_{i-1}$$

verwendet. Die p_i sind durch folgendes Gleichungssystem gegeben und müssen ausgerechnet werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ h_0^{-1} & 2(h_0^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2}^{-1} & 2(h_{n-2}^{-1} + h_{n-1}^{-1}) & h_{n-1}^{-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{d}},$$

wobei

$$\begin{aligned} d_0 &:= 3f[x_1, x_0] \\ d_i &:= 3\left(\frac{f[x_i, x_{i-1}]}{h_{i-1}} + \frac{f[x_{i+1}, x_i]}{h_i}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ d_n &:= 3\,f[x_n, x_{n-1}]. \end{aligned}$$

Der aus den Rechnungen resultierende Spline $s(x)$ ist dann eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion, die $s(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, und die *natürlichen Randbedingungen*

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0$$

erfüllt.

Splines in MATLAB

In Matlab kann der eingespannte interpolierende kubische Spline mit Hilfe des Befehls `S = spline(X, Y, Z)` berechnet werden. Dabei enthalten die Vektoren `X` und `Y` die Stützstellen. Im Vektor `Z` stehen die Werte, an denen der Spline ausgewertet werden soll, und im Vektor `S` werden diese Funktionsauswertungen gespeichert.
Mit `doc spline` kannst du dir in MATLAB die Dokumentation zu dem Befehl anzeigen lassen. Dort findest du eine ausführlichere Beschreibung.

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
`http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumII/praktikumII.html`