
Beilage zur Serie 5

Newton-Interpolation in 2D

Zweidimensionale Newton-Interpolation

Um die Polynominterpolation auf dem Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ zu realisieren, seien $\xi = [\xi_0, \dots, \xi_n]$ $n + 1$ Knoten in $[0, 1]$ und $\eta = [\eta_0, \dots, \eta_m]$ $m + 1$ Knoten in $[0, 1]$. Betrachte nun jede mögliche Paarung dieser Knoten, also die $(m + 1) \times (n + 1)$ Knotenpaare (ξ_i, η_j) in $[0, 1]^2$ für $i = 0, \dots, n$ und $j = 0, \dots, m$. Für eine stetige Funktion $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir mit diesen Knotenpaaren die Stützwerte $\mathbf{F} := [f(\xi_i, \eta_j)]_{j,i} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$.

Es werden zunächst zu den $n + 1$ Knoten ξ_i die $m + 1$ eindimensionalen Newtonschen Interpolationspolynome p_j mit der Eigenschaft $p_j(\xi_i) = \mathbf{F}_{j,i}$ bestimmt. Die Newton-Koeffizienten der Polynome p_j können wie auf der Beilage zu Serie 4 mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen berechnet werden. Die Newton-Koeffizienten der Polynome p_j werden dann zeilenweise in der Koeffizientenmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$ abgelegt.

Um nun die Koeffizienten des zweidimensionalen Interpolationspolynoms zu bestimmen, wenden wir das Schema der dividierten Differenzen auf die Daten $(\eta_0, p_0(x)), \dots, (\eta_m, p_m(x))$ an. Die Addition zweier Polynome p_j in der Newton-Basis zu gleichen Stützstellen lässt sich durch eine Addition der Koeffizientenvektoren realisieren. Dazu muss das Schema der dividierten Differenzen auf die Zeilen von \mathbf{C} angewandt werden.

Der Algorithmus für die zweidimensionale Interpolation lautet also wie folgt:

Input: Stützstellen ξ, η , Stützwerte $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$

Output: Koeffizientenmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$

$\mathbf{C} = \mathbf{F}$

for $i = 1, \dots, n + 1$ **do**

for $j = n + 1, \dots, i + 1$ **do**

$$\mathbf{C}_{:,j} = \frac{\mathbf{C}_{:,j} - \mathbf{C}_{:,j-1}}{\xi_j - \xi_{j-i}}$$

end for

end for

for $i = 1, \dots, m + 1$ **do**

for $j = m + 1, \dots, i + 1$ **do**

$$\mathbf{C}_{j,:} = \frac{\mathbf{C}_{j,:} - \mathbf{C}_{j-1,:}}{\eta_j - \eta_{j-i}}$$

end for

end for

Um das zweidimensionale Interpolationspolynom an einer Stelle (x, y) auswerten zu können, benutzen wir ein geschichtetes Horner-Schema. Dazu verwenden wir für jedes $j = 0, 1, \dots, m$ ein eindimensionales Horner-Schema, um die jeweils $n + 1$ Koeffizienten in den Zeilen $\mathbf{C}_{j,:}$ in x auszuwerten. Die resultierenden $m + 1$ Werte entsprechen dann den Koeffizienten des Interpolationspolynoms in y -Richtung, das mit einem eindimensionalen Horner-Schema im Punkt y ausgewertet werden kann. Damit die $m + 1$ Werte nicht zwischengespeichert werden müssen, können die beiden Horner-Schemas ineinander verschachtelt werden.

Allgemeine Informationen befinden sich auf der [Website](#).

Zuletzt editiert am 5. April 2024.