Beilage zur Serie 5

Newton-Interpolation in 2D

Zweidimensionale Newton-Interpolation

Um die Polynominterpolation auf dem Einheitsquadrat $[0,1]^2$ zu realisieren, seien $\boldsymbol{\xi} = [\xi_0,\dots,\xi_n]$ $n+1$ Knoten in $[0,1]$ und $\boldsymbol{\eta} = [\eta_0,\dots,\eta_m]$ $m+1$ Knoten in $[0,1]$. Betrachte nun jede mögliche Paarung dieser Knoten, also die $(m+1)\times(n+1)$ Knotenpaare (ξ_i,η_j) in $[0,1]^2$ für $i = 0,\dots,n$ und $j = 0,\dots,m$. Für eine stetige Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ setzen wir mit diesen Knotenpaaren die Stützwerte $\mathbf{F} := [f(\xi_i,\eta_j)]_{j,i} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$.

Es werden zunächst zu den $n+1$ Knoten ξ_i die $m+1$ eindimensionalen Newtonschen Interpolationspolynome p_j mit der Eigenschaft $p_j(\xi_i) = \mathbf{F}_{j,i}$ bestimmt. Die Newton-Koeffizienten der Polynome p_j können wie auf der Beilage zu Serie 4 mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen berechnet werden. Die Newton-Koeffizienten der Polynome p_j werden dann zeilenweise in der Koeffizientenmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$ abgelegt.
Um nun die Koeffizienten des zweidimensionalen Interpolationspolynoms zu bestimmen, wenden wir das Schema der dividierten Differenzen auf die Daten $\big(\eta_0, p_0(x)\big),\dots,\big(\eta_m, p_m(x)\big)$ an. Die Addition zweier Polynome p_j in der Newton-Basis zu gleichen Stützstellen lässt sich durch eine Addition der Koeffizientenvektoren realisieren. Zur Berechnung der Koeffizienten des zweidimensionalen Interpolationspolynom muss das Schema der dividierten Differenzen auf die Zeilen von $\mathbf{C}$ angewandt werden.
Der Algorithmus für die zweidimensionale Interpolation lautet also wie folgt:

Input: Stützstellen $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$, Stützwerte $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$.
Output: Koeffizientenmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$.

setze $\mathbf{C} = \mathbf{F}$
for $i = 1,\dots,n+1$ **do**
  for $j = n+1,\dots,i+1$ **do**
    setze $\mathbf{C}_{:,j} = (\mathbf{C}_{:,j} - \mathbf{C}_{:,j-1})/(\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_{j-i})$
  end for
end for
for $i = 1,\dots,m+1$ **do**
  for $j = m+1,\dots,i+1$ **do**
    setze $\mathbf{C}_{j,:} = (\mathbf{C}_{j,:} - \mathbf{C}_{j-1,:})/(\boldsymbol{\eta}_j - \boldsymbol{\eta}_{j-i})$
  end for
end for

Um das zweidimensionale Interpolationspolynom an einer Stelle (x, y) auswerten zu können, benutzen wir ein geschachteltes Horner-Schema. Dazu verwenden wir für jedes $j = 0, 1, \dots, m$ ein eindimensionales Horner-Schema, um die jeweils $n + 1$ Koeffizienten in den Zeilen $\mathbf{C}_{j,:}$ in x auszuwerten. Die resultierenden $m + 1$ Werte entsprechen dann den Koeffizienten des Interpolationspolynoms in y-Richtung, das mit einem eindimensionalen Horner-Schema im Punkt y ausgewertet werden kann. Damit die $m + 1$ Werte nicht zwischengespeichert werden müssen, können die beiden Horner-Schemas ineinander verschachtelt werden.