

Beilage zur Serie 3

Cholesky-Zerlegung

Die Cholesky-Zerlegung zerlegt eine symmetrisch positiv definite Matrix \mathbf{A} in eine linke untere Dreiecksmatrix \mathbf{L} und ihre Transponierte, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$.

Dabei sind nun nicht mehr alle Diagonaleinträge der Matrix \mathbf{L} gleich 1. Ähnlich wie bei der Implementierung der LR-Zerlegung mit Pivotisierung in der Serie 2 möchten wir nicht eine komplett neue Matrix \mathbf{L} erzeugen, sondern die Einträge der Matrix \mathbf{A} im Verlauf des Verfahrens überschreiben. Dabei werden nur die Einträge im unteren Block und auf der Diagonalen von \mathbf{A} überschrieben. Die Einträge im oberen Block werden nicht verändert und sind nach der Zerlegung nicht mehr relevant.

Der Algorithmus für die Cholesky-Zerlegung lautet wie folgt:

```
for  $i = 1$  to  $n$  do  
   $a_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}^2}$   
  for  $j = i + 1$  to  $n$  do  
     $a_{j,i} = \frac{1}{a_{i,i}} \left( a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{j,k} a_{i,k} \right)$   
  end for  
end for  
Setze  $\mathbf{L}$  = Hauptdiagonale + untere Dreieckshälfte von  $\mathbf{A}$ 
```

Der Aufwand für den Algorithmus ist etwa $n^3/6$ Multiplikationen.

Eine eindeutige Cholesky-Zerlegung existiert genau dann, wenn die Matrix symmetrisch und positiv definit ist. Ist der Term $a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}^2$ für ein i kleiner als 0, so ist die Matrix nicht positiv definit und der Algorithmus muss abgebrochen werden.

Bemerkung: Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst positiv definit, falls gilt

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}.$$

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite

<http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumII/praktikumII.html>