
Beilage zur Serie 1

LR-Zerlegung

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

kann der Gauss-Algorithmus benutzt werden. Dazu

1. wird die LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ der Matrix \mathbf{A} berechnet. Dabei ist \mathbf{L} eine untere linke Dreiecksmatrix mit 1 auf der Hauptdiagonalen und \mathbf{R} eine obere rechte Dreiecksmatrix.
2. wird das Gleichungssystem $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ nach \mathbf{y} gelöst (Vorwärtssubstitution).
3. wird das Gleichungssystem $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$ nach \mathbf{x} gelöst (Rückwärtssubstitution).

Der Aufwand für den Gauss-Algorithmus ist etwa $n^3/3$ Multiplikationen.

Für *Bandmatrizen* kann der Algorithmus effizient implementiert werden. Für $p, q \in \mathbb{N}$ ist eine Matrix \mathbf{A} eine Bandmatrix mit *oberer Bandbreite* p und *unterer Bandbreite* q , falls gilt:

$$a_{i,j} = 0 \text{ für } i + p < j \text{ oder } j + q < i$$

Neben der Hauptdiagonale sind also nur die p oberen und die q unteren Nebendiagonalen besetzt. Die restlichen Einträge sind allesamt 0. Solche Matrizen entstehen häufig bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen.

Der Algorithmus für die LR-Zerlegung einer Bandmatrix ist in *Pseudocode* angegeben als:

```
L = E
R = A
for  $k = 1$  to  $n - 1$  do
  for  $i = k + 1$  to  $\min(n, k + q)$  do
     $l_{i,k} = \frac{r_{i,k}}{r_{k,k}}$ 
    for  $j = k$  to  $\min(n, k + p)$  do
       $r_{i,j} = r_{i,j} - l_{i,k}r_{k,j}$ 
    end for
  end for
end for
```

Nachdem nun die LR-Zerlegung bestimmt wurde, löst man in der Vorwärtssubstitution das Gleichungssystem

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}.$$

Ausgeschrieben hat es die Form

$$l_{1,1}y_1 = b_1 \quad (1)$$

$$l_{2,1}y_1 + l_{2,2}y_2 = b_2 \quad (2)$$

$$l_{3,1}y_1 + l_{3,2}y_2 + l_{3,3}y_3 = b_3 \quad (3)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$l_{n,1}y_1 + l_{n,2}y_2 + l_{n,3}y_3 + \dots + l_{n,n}y_n = b_n \quad (n)$$

Die Gleichungen (1) bis (n) können nacheinander jeweils nach y_1, \dots, y_n aufgelöst werden und das ergibt

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}},$$

$$y_2 = \frac{1}{l_{2,2}}(b_2 - l_{2,1}y_1),$$

$$y_3 = \frac{1}{l_{3,3}}(b_3 - (l_{3,1}y_1 + l_{3,2}y_2)),$$

$$\vdots$$

$$y_n = \frac{1}{l_{n,n}} \left(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k}y_k \right).$$

Zusammenfassend, lautet der Pseudocode dazu also:

```

y1 = b1/l1,1
for i = 2, 3, ..., n do
    yi = 1/li,i ( bi - sum_{k=1}^{i-1} li,k*yk )
end for

```

Analog ergibt sich für die Rückwärtssubstitution, in der das Gleichungssystem

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

gelöst wird,

$$x_i = \frac{1}{r_{i,i}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n r_{i,k}x_k \right),$$

wobei zuerst x_n berechnet wird, dann x_{n-1} , und so weiter bis x_1 ausgerechnet ist. Indem die Bandstruktur der Matrix \mathbf{A} berücksichtigt wird, lässt sich sowohl die Vorwärts- als auch die Rückwärtssubstitution effizienter implementieren, so dass wir für den Gauss-Algorithmus für Bandmatrizen einen Aufwand von ungefähr $n(pq + p + q)$ Multiplikationen erhalten.

Permutationsmatrizen

Eine *Permutation* π ist eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Das heisst, sie permutiert ("mischt") die Zahlen $\{1, \dots, n\}$. Eine häufig benutzte Darstellung einer Permutation ist die *Zweizeilenform*:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

In der oberen Zeile stehen die Zahlen von 1 bis n und für jede Zahl $j \in \{1, \dots, n\}$ steht darunter der Funktionswert $\pi(j)$.

Die einer Permutation zugehörigen *Permutationsmatrix* \mathbf{P}_π ist nun die $(n \times n)$ -Matrix, welche jeweils eine 1 in der j -ten Spalte und der $\pi(j)$ -ten Zeile besitzt und Nullen überall sonst (d.h. $\mathbf{P}_\pi \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\pi(i)}$). Diese Matrizen haben die Eigenschaften:

1. $\mathbf{P}_\pi \mathbf{P}_\sigma = \mathbf{P}_{\pi \circ \sigma}$, für zwei Permutationen π und σ ;
2. $\mathbf{P}_\pi^{-1} = \mathbf{P}_{\pi^{-1}} = \mathbf{P}_\pi^T$ also $\mathbf{P}_\pi \mathbf{P}_\pi^T = \mathbf{E}$ (Orthogonalität);
3. $\det(\mathbf{P}_\pi) = \text{sign } \pi = \pm 1$.

Beispiel. $\mathbf{P}_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die zur Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ zugehörige Permutationsmatrix.

Eine weitere gängige Darstellung von Permutationen ist die *Zyklenschreibweise*. Dabei wird genutzt, dass jede Permutation sich eindeutig (bis auf Reihenfolge) als Produkt disjunkter *Zyklen* darstellen lässt. Der Zyklus einer Zahl $a \in \{1, \dots, n\}$ ist $(a \ \pi(a) \ \pi^2(a) \ \dots \ \pi^{l_a-1}(a))$ und hat Länge $l_a \in \mathbb{N}$, wobei l_a die kleinste natürliche Zahl ist, die $\pi^{l_a}(a) = a$ erfüllt. Beachte dabei: Es gilt auch $\mathbf{P}_\pi^k \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_{\pi^k(a)}$ für $k \in \{1, \dots, l_a\}$.

Das *Signum* einer Permutation (und damit die Determinante der zugehörigen Permutationsmatrix, siehe Punkt 3 oben) ist bestimmt durch die Anzahl der Zyklen mit gerader Länge: Hat eine Permutation k Zyklen mit gerader Länge, so ist das Signum der Permutation $(-1)^k$.

Beispiel. Für die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ lautet die Zyklenschreibweise $\pi = (1)(2 \ 4 \ 6)(3 \ 5) = (2 \ 4 \ 6)(3 \ 5)$. Das Signum dieser Permutation ist in diesem Fall -1 .

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite <http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumII/praktikumII.html>