# Schlussprojekt

Messenbesuch: Lorenz und Chaos

zur 48. – 50. KW (29.11. – 19.12.2020)

Löse die folgenden Aufgaben selbstständig mit Matlab, Maple und LaTeX. Sollte etwas unklar sein, bespreche es entweder in der Praktikumsstunde mit den AssistentInnen oder auch in der Fragestunde Freitags von 14:15 bis 16:00 Uhr.

Mika hat sich informiert und gehört, dass an der Mathematikermesse, die dieses Jahr in Basel stattfindet, spannendes über die **Lorenz-Gleichungen** berichtet wird. Mika will die Messe zusammen mit dir besuchen und leistet Überzeugungsarbeit: «Die Lorenz-Gleichungen beschreiben ein **chaotisches System von Differentialgleichungen**! Wenn der Startpunkt nur ein wenig geändert wird, landet man wieder ganz woanders! Das wird an der Mathematikermesse gezeigt und das müssen wir uns anschauen gehen!» Vor allem um Mika eine Freude zu machen, beschliesst ihr die Messe gemeinsam zu besuchen.

Mika schlägt vor, dass ihr euch so schnell wie möglich trefft und dann zusammen zur Messe geht. Mika hat den vereinfachten Stadtplan von Basel aufgezeichnet, so wie in Abbildung 1 dargestellt. Mika erklärt weiter: «Dein Startpunkt ist im Knoten 1. Die Messe ist im Knoten 10. Wenn du die letzte Zahl deiner Matrikelnummer nimmst, diese Zahl modulo 4 rechnest und 5 drauf addierst, dann wohne ich genau dort! Von dort aus starte ich!»

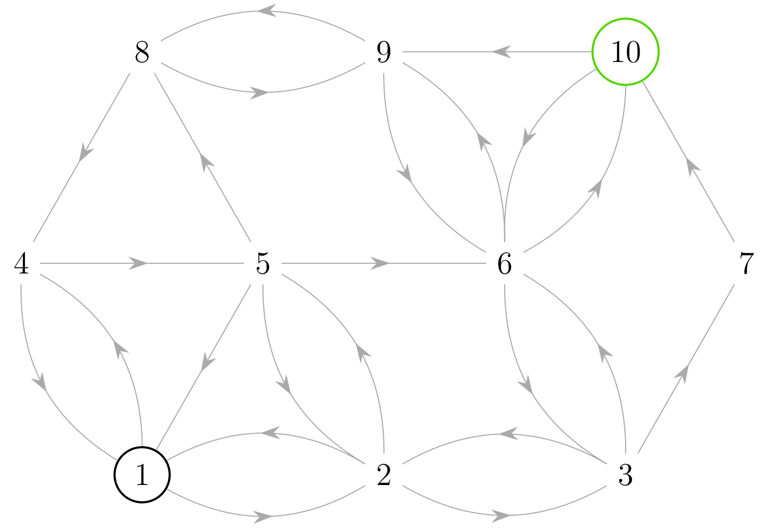


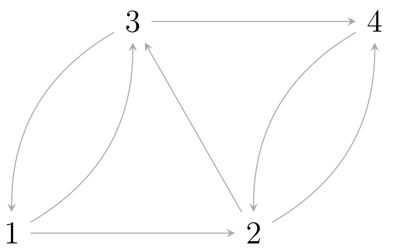

Abbildung 1: Vereinfachter Stadtplan von Basel als gerichteter Graph.

Mika erklärt weiter, dass eine Möglichkeit darin besteht, **gerichtete Graphen** als Matrizen darzustellen. Eine solche Matrix $A$ die einen gerichteten Graphen beschreibt, wird

**Adjazenzmatrix** genannt. Ihre Einträge erfüllen die Eigenschaft

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls die Knoten } i \text{ und } j \text{ miteinander verbunden sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Beispiel eines gerichteten Graphen und dazugehöriger Adjazenzmatrix ist in der folgenden Abbildung zu sehen:




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es lässt sich ein Vektor $v$ definieren, der die aktuell betrachtete Position markiert. Angenommen wir starten im kleinen Beispielgraph in Knoten 1, dann ist

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn nun alle möglichen Destinationen gefunden werden sollen, die mit einem Schritt ausgehend von Knoten 1 erreicht werden können, dann lässt sich das mittels

$$vA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen. Alle Knoten, die ausgehend vom Knoten 1 erreicht werden können, sind die Knoten 2 und 3. Wenn wir einen zweiten Schritt machen, gehen wir analog vor und betrachten

$$vA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dieses Ergebnis bedeutet: Mit Startpunkt in Knoten 1, gibt es nach zwei Schritten einen Weg um in 1, einen Weg um in 3 und zwei Wege um in 4 zu landen. Es gibt bloss keinen Weg um den Knoten 2 nach genau 2 Schritten ausgehend vom Knoten 1 zu erreichen!
Um Wege mit noch mehr Schritten zu berücksichtigen, kann die Matrix $A$ wieder rechts ranmultipliziert werden, also die Produkte $vA^3$, $vA^4$ usw. betrachtet werden.

**Aufgabe 1: Mathematikermesse.**

a) Erstelle die Adjazenzmatrix zum Graphen, der in Abbildung 1 dargestellt ist, mit (mindestens) zwei von einander verschiedenen Vorgehen in Matlab.

b) Schreibe in Matlab ein Skript, in dem du mit Hilfe von `while`-Schleifen folgendes berechnest:

   (i) die kleinste Anzahl an Schritten von deinem zu Hause (Knoten 1) zur Mathematikermesse (Knoten 10).

(ii) die kleinste Anzahl an Schritten von Mikas zu Hause (Knoten {5+(letzte Zahl deiner Matrikelnummer Modulo 4)}) zur Mathematikermesse (Knoten 10).

(iii) die kleinste Anzahl an Schritten, die Mika und du ausgehend von eurem jeweiligen zu Hause machen müsst um einander zu treffen, wobei ihr beide die selbe Anzahl an Schritten zurücklegt.

(iv) ausgehend von eurem in (iii) berechneten Treffpunkt, die kleinste Anzahl an Schritten zur Mathematikermesse. Sollte in (iii) der Treffpunkt nicht eindeutig sein, dann wähle den Treffpunkt aus, der dir am liebsten ist.

Gib zu jeder Teilaufgabe (i)–(iv) die du in Matlab berechnet hast, einen möglichen Weg im Graph von Abbildung 1 an. Beispielsweise umfasst der schnellste Weg von Knoten 5 nach Knoten 4 zwei Schritte und ist: $5 \to 8 \to 4$.

An der Mathematikermesse angekommen, seht ihr als erstes einen Stand an dem heisse Getränke verkauft werden. Es werden heisse Schokolade oder Kaffee angeboten. In der Getränkeschlange stehen zwei Chemiker die sich angeregt über denen in diesen Getränken enthaltenen Molekülen unterhalten – Koffein (1,3,7-Trimethylxanthin) in Kaffee und Theobromin (3,7-Dimethylxanthin) in heisser Schokolade. Sie erwähnen das LaTeX-Paket `chemfig`, mit dem sich die Moleküle zeichnen lassen.

**Aufgabe 1½: Erfrischungspause.**
Suche eines der beiden Getränkemoleküle aus und benutze `chemfig` um das zugehörige Molekül zu zeichnen, in derselben Orientierung wie in Abbildung 3. Die Farbe für die Methylgruppen ist optional.
**Hinweis:** Dabei kann diese Einführung nützlich sein oder auch die Dokumentation zum `chemfig`-Paket.

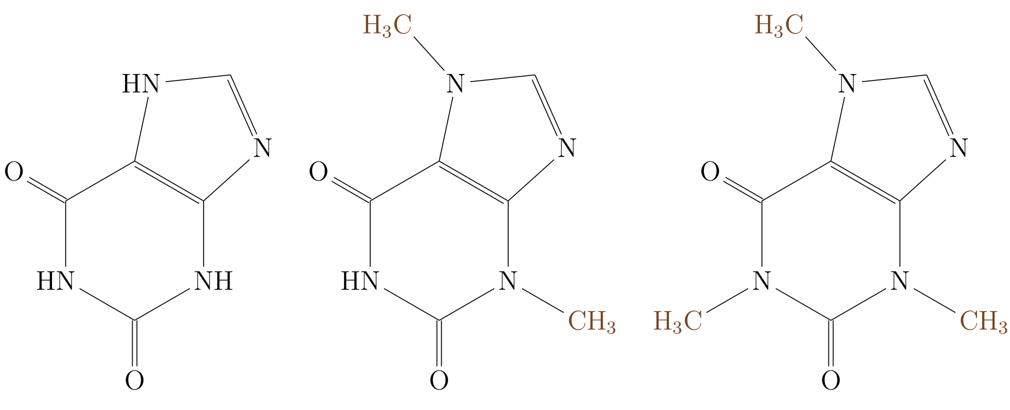


Abbildung 3: Xanthin (links), Theobromin (Mitte) und Kaffein (rechts).

Nachdem ihr nun bereit seid die Messe zu erkunden, empfehlen euch zwei Besucher, die zufälllig gehört haben, dass ihr euch für die Lorenz-Gleichungen interessiert, zuerst den Stand zur **Hénon-Abbildung** zu besuchen. Sie begründen das damit, dass die Hénon-Abbildung genauso wie die Lorenz-Gleichungen ein **chaotisches Verhalten** aufweist. Sie erklären weiter, dass Michel Hénon seine Abbildungen aus den Lorenz-Gleichungen hergeleitet hat, wobei er besonders darauf geachtet hat, die chaotischen Eigenschaften beizubehalten. Seine Motivation dahinter war, Chaos in diesem etwas simpleren, diskreten,

chaotischen System zu erforschen.
Ihr nehmt diese Empfehlung an und beim Stand angekommen seht ihr die Hénon-Abbildung angeschrieben:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - a x_n^2, \\ y_{n+1} &= b x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Einen Einblick in diese zweidimensionale Zahlenfolge, die abhängt von den konstanten Parametern $a, b \in \mathbb{R}_+$, sowie der Werte des Startpaares $(x_0, y_0)$, wird erhalten durch die Lösung der folgenden Aufgaben, erklären euch die zuständigen Assistierenden am Stand.

**Aufgabe 2: Hénon-Abbildung.**

a) Implementiere die Funktion `[x,y] = henonMap(a,b,x0,y0,N)`, die die zwei Vektoren $x$ und $y$ der Länge $N$ zurückgibt. $x = (x_i)_{i=0}^N$ und $y = (y_i)_{i=0}^N$ sollen dabei alle Werte $x_0$ bis $x_N$ bzw. $y_0$ bis $y_N$ der Hénon-Abbildung (1) beinhalten. Diese Werte werden berechnet für eine spezifische Wahl von $a, b, x_0, y_0$. Diese vier Parameter und $N$ sollen der Funktion `henonMap` als Argumente übergeben werden können.

b) Seien $a = 1.4$, $b = 0.3$ und $N = 500$. Wir wählen einerseits die Startwerte $(x_0, y_0) = (1, 0)$ und andererseits $(x_0, y_0) = (1.01, 0)$. Evaluiere deine Funktion `henonMap(a,b,x0,y0,N)` für diese zwei Startwertpaare.
Plotte nun in zwei verschiedenen Plots $x$ gegen $y$, jeweils für die zwei verschiedenen Startwerte. Füge den Koordinatenachsen eine Beschriftung hinzu.
In einem zweiten Plot, zeichne die Entwicklung der Werte von $x_n$ bzw. $y_n$ in Abhängigkeit von $n$, bis $n = 100$, für beide Startwertpaare jeweils in einem Plot. Nutze verschiedene Farben für deine Kurven um diese voneinander unterscheiden zu können. Füge hier auch den Achsen eine Beschriftung hinzu.
Wie diese Plots beispielsweise aussehen können, ist in Abbildung 4 und 5 zu sehen.

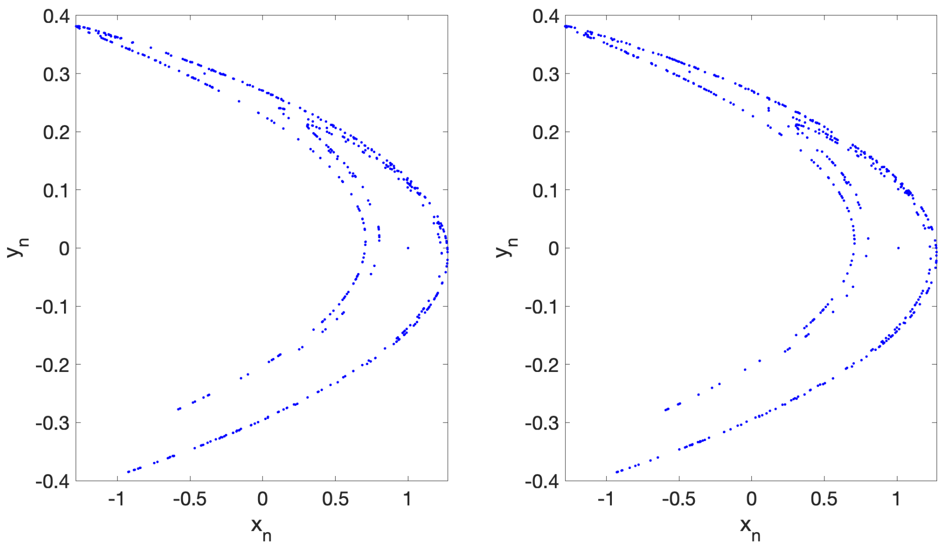



Abbildung 4: Entwicklung von $(x_i)_{i=0}^{500}$ versus $(y_i)_{i=0}^{500}$ aus der Hénon-Abbildung (1) für die Werte $a = 1.4$, $b = 0.3$ und $(x_0, y_0) = (1, 0)$ links und $(x_0, y_0) = (1.01, 0)$ rechts.

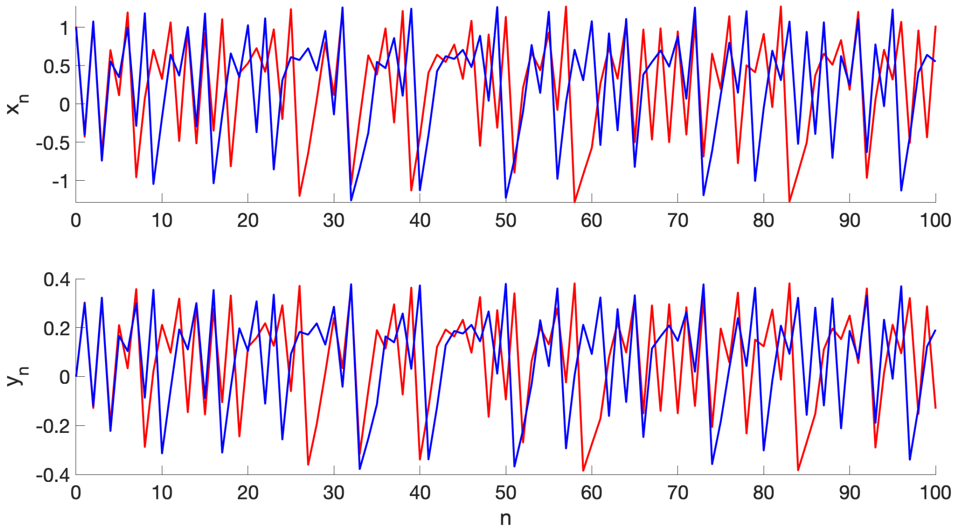



Abbildung 5: Entwicklung der Folgen von $(x_i)_{i=0}^{100}$ und $(y_i)_{i=0}^{100}$ aus der Hénon-Abbildung (1) für die Werte $a = 1.4$, $b = 0.3$ und $(x_0, y_0) = (1, 0)$ in blau und $(x_0, y_0) = (1.01, 0)$ in rot.

In Abbildung 4 lässt sich das chaotische Verhalten der Hénon-Abbidlung nicht sofort erkennen. In Abbildung 5 dagegen ist ersichtlich, dass die kleine Veränderung in den Startwerten $(x_0, y_0)$ eine grosse Veränderung mit der Zeit herbeiführt. Dennoch ist das was in Abbildung 4 beobachtet wird, eine Eigenschaft die die Hénon-Abbidlung mit den Lorenz-Gleichungen teilt: Die Werte der Hénon-Abbildung verteilen sich ähnlich im Raum, trotz der chaotischen Entwicklung der Folgenglieder. Eine solche scheinbar anziehende Disposition der Folgenglieder im Raum, unabhängig von der Wahl der Anfangswerte, wird im Kontext der Chaostheorie ein **Attraktor** genannt. Das weist darauf hin, dass sich im Chaos dieser Gleichungen Struktur versteckt.
Ausgerüstet mit diesen neuerlangten Kenntnissen über die Hénon-Abbildung, wollt ihr nun den Stand zu den **Lorenz-Gleichungen** aufsuchen. Die Lorenz-Gleichungen stehen dort gross angeschrieben für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \sigma \left( Y(t) - X(t) \right), \\ \dot{Y}(t) &= X(t) \left( \rho - Z(t) \right) - Y(t), \\ \dot{Z}(t) &= X(t)Y(t) - \beta Z(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Es wird euch erklärt, dass Edward Lorenz diese Gleichungen hergeleitet hatte, um ein simples mathematisches Modell zur atmosphärischen Konvektion zu erstellen. Er wollte also den Aufstieg erwärmter Luftmasse und das Absinken kalter Luftmasse in der Erdatmosphäre und damit bevorstehendes Wetter beschreiben. Diese Gleichungen, die in Zusammenarbeit mit Ellen Fetter hergeleitet wurden, leiteten unverhofft die mathematische Erforschung von Chaos herbei.
Dieses Differentialgleichungssystem, das die Entwicklung der Ableitung der drei Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ beschreibt, hängt ab von den konstanten Parametern $\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}_+$.
Um die drei Funktionen am Computer auszurechnen und sich anzeigen zu lassen, müssen das kontinuierliche Gleichungssystem und die darin enthaltenen kontinuierlichen Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ diskretisiert werden. In diskreten Zeitschritten $t_i$, $i = 0, \ldots, N$

kann dann eine dreidimensionale Folge von Werten $\big(X(t_i), Y(t_i), Z(t_i)\big)_{i=1}^{N}$, die diese drei Funktionen beschreiben, gefunden werden.
Um diese Gleichungen also zu diskretisieren, benutzen wir das **explizite Euler-Verfahren**, ursprünglich von Leonhard Euler 1768 vorgestellt. Dabei wird für ein kleines $h > 0$ und einer (mehrdimensionalen) Funktion $\boldsymbol{V}$, der Differenzquotient

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t) \approx \frac{\boldsymbol{V}(t+h) - \boldsymbol{V}(t)}{h} \tag{3}$$

betrachtet. Wenn auf der rechten Seite der Gleichung der Limes $h \to 0$ betrachtet wird, entspricht er genau der Definition der Ableitung der Funktion $\boldsymbol{V}$.
Auflösen nach $\boldsymbol{V}(t+h)$ in (3) ergibt

$$\boldsymbol{V}(t+h) \approx \boldsymbol{V}(t) + h\dot{\boldsymbol{V}}(t). \tag{4}$$

Wenn wir also eine Lösung $\boldsymbol{V}(t)$ zum Zeitpunkt $t$ und deren Ableitung $\dot{\boldsymbol{V}}(t)$ im Zeitpunkt $t$ kennen, können wir mit dem expliziten Euler-Verfahren (4) eine weitere Lösung $\boldsymbol{V}(t+h)$ zum Zeitpunkt $t+h$ berechnen. Je kleiner $h > 0$ gewählt wird, desto genauer kann der Wert $\boldsymbol{V}(t+h)$ approximiert werden.
Wieder versprechen die Assistierenden am Stand, dass durch die Lösung der folgenden Aufgaben noch mehr zu den Lorenz-Gleichungen erfahren werden kann.

**Aufgabe 3: Lorenz-Gleichungen.**

a) Suche in Maple nach den drei Fixpunkten der Lorenz-Gleichungen (2) für beliebige Werte von $\sigma, \rho, \beta$. Die Fixpunkte sind diejenigen Werte für die gilt:

$$\dot{X} \equiv 0, \quad \dot{Y} \equiv 0, \quad \dot{Z} \equiv 0.$$

**Hinweis:** Die Fixpunkte der Lorenz-Gleichungen sind die triviale Lösung $(X, Y, Z) \equiv (0, 0, 0)$ und die zwei Lösungen

$$X \equiv Y \equiv \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \quad Z \equiv \rho - 1.$$

b) Implementiere die Funktion `[Xdot,Ydot,Zdot] = lorenzGlgen(X, Y, Z, s, r, b)` in Matlab. Für gegebene Werte der Funktionen $X(t), Y(t), Z(t)$ zu einem Zeitpunkt $t$ und der Parameter $\sigma, \rho, \beta$ soll die Funktion die Werte der Ableitungen $\dot{X}(t), \dot{Y}(t), \dot{Z}(t)$ zum selben Zeitpunkt $t$ zurückgeben. Nutze dazu die Lorenz-Gleichungen (2).

c) Implementiere die Funktion `[XT,YT,ZT] = explEulLor(X0,Y0,Z0,s,r,b,T,h)` in Matlab. Diese Funktion erhält die Anfangswerte $X(0), Y(0), Z(0)$, die Parameter $\sigma, \rho, \beta$ aus den Lorenz-Gleichungen (2), die Endzeit $T$ und die Zeitschrittweite $h$. Sei $N \in \mathbb{N}$ derart, dass gilt: $T = Nh$. Dann berechnet die Funktion `explEulLor` durch wiederholte Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens (4) die drei Vektoren $X_T = (X(t_i))_{i=0}^{N}$, $Y_T = (Y(t_i))_{i=0}^{N}$ und $Z_T = (Z(t_i))_{i=0}^{N}$, wobei $t_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$.

d) Wähle die Parameterwerte $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$, $T = 20$ und $h = 10^{-4}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ wieder der Wert für den gilt $Nh = T$. Wir wählen einerseits die Anfangswerte $\big(X(0), Y(0), Z(0)\big) = (30, 30, 30)$, andererseits die Anfangswerte $\big(X(0), Y(0), Z(0)\big) =$

$(30, 30.01, 30)$. Nutze die Funktion `explEulLor` um die drei Vektoren $X_1 = (X(t_i))_{i=0}^N$, $Y_1 = (Y(t_i))_{i=0}^N$ und $Z_1 = (Z(t_i))_{i=0}^N$ für beide Wahlen der Startwerte zu berechnen.
Plotte in Matlab in einem 3D-Plot die Werte der Vektoren $X_1$, $Y_1$ und $Z_1$ für beide Wahlen der Startwerte in zwei separaten Plots. Füge in die Plots die zwei nichttrivialen Fixpunkte hinzu. Füge Beschriftungen der $x$- und der $z$-Koordinatenachsen hinzu. Wähle mit Hilfe des Matlab-Befehls `view` die Ansicht aus, aus der die $xz$-Ebene angesehen wird.
Plotte nun auch die Entwicklung der Lösungskomponenten $X_1$, $Y_1$, und $Z_1$ einzeln. In einem Plot kannst du jeweils die Komponente für beide Startwerte plotten indem du verschiedene Farben für die Kurven benutzt. Füge auch hier den Achsen Beschriftungen hinzu.
Du kannst deine Plots mit den in Abbildung 6 und 7 dargestellten Plots vergleichen.

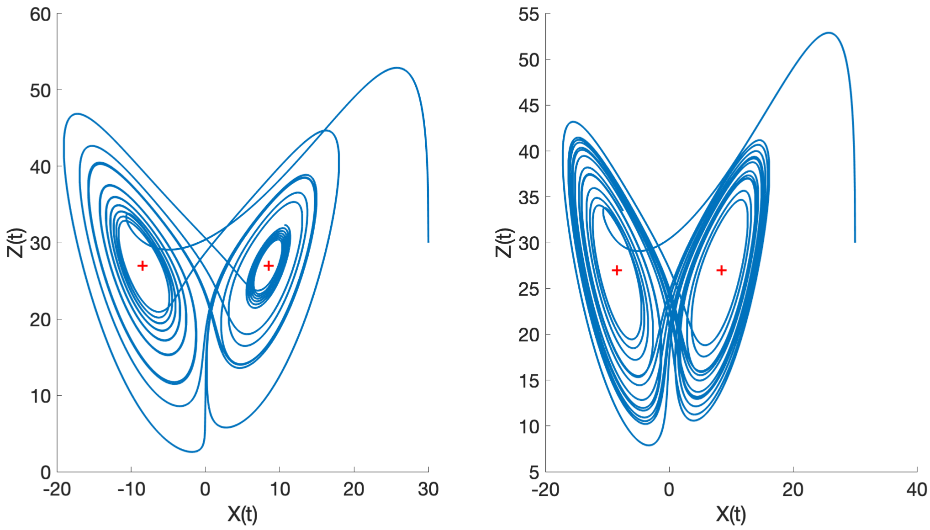



Abbildung 6: Lösung der Lorenz-Gleichungen (2) für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $\rho = 28$ und $\beta = \frac{8}{3}$, mit $t \in [0, 20]$ und Anfangswerten $(X(0), Y(0), Z(0)) = (30, 30, 30)$ links und $(X(0), Y(0), Z(0)) = (30, 30.01, 30)$ rechts.

e) Wir wollen nun eine periodische Lösung der Lorenz-Gleichungen betrachten. Wähle dazu die Parameterwerte $\sigma = 10$, $\rho = 160$, $\beta = \frac{8}{3}$, die Anfangswerte $\big(X(0), Y(0), Z(0)\big) = (0, 1, 0)$, $T = 15$ und $h = 10^{-4}$. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ diejenigen Zahlen, so dass $n_1 h = 10$ bzw. $n_2 h = 15$. Berechne die Vektoren $X_2 = (X(t_i))_{i=n_1}^{n_2}$, $Y_2 = (Y(t_i))_{i=n_1}^{n_2}$ und $Z_2 = (Z(t_i))_{i=n_1}^{n_2}$, unter Zuhilfenahme der Funktion `explEulLor`. Die drei Vektoren $X_2, Y_2, Z_3$ enthalten demnach eine Approximation von $(X(t), Y(t), Z(t))$ für $t \in [10, 15]$.
Plotte in Matlab in einem 3D-Plot die Werte $X_2$, $Y_2$ und $Z_2$ mit den zwei nichttrivialen Fixpunkten. Beschrifte die drei Koordinatenachsen. Wähle eine geeignete Ansicht im Plot um die Periodizität der Lösung ersichtlich zu machen.
Du kannst dein Plot mit dem in Abbildung 8 dargestellten Plot vergleichen.

Es gibt also auch periodische Lösungen der Lorenz-Gleichungen für bestimmte Parameter. Dass aber nicht alle Lösungen der Lorenz-Gleichungen gegen periodische Lösungen konvergieren, wurde von Warwick Tucker 1999 bewiesen. Dies bedeutet das chaotische Verhalten

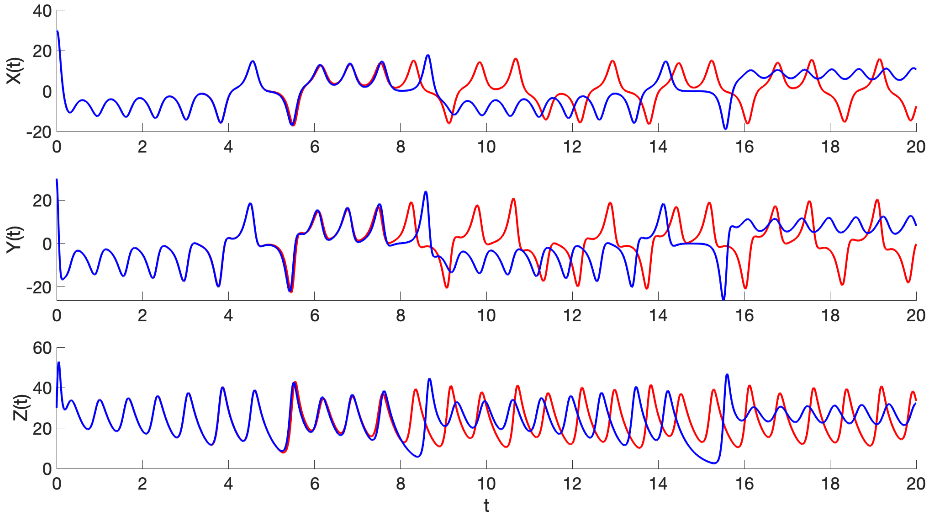



Abbildung 7: Zeitliche Entwicklung der einzelnen Komponenten der Lösung der Lorenz-Gleichungen (2) für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $\rho = 28$ und $\beta = \frac{8}{3}$, mit $t \in [0, 20]$ und Anfangswerten $(X(0), Y(0), Z(0)) = (30, 30, 30)$ in blau und $(X(0), Y(0), Z(0)) = (30, 30.01, 30)$ in rot.

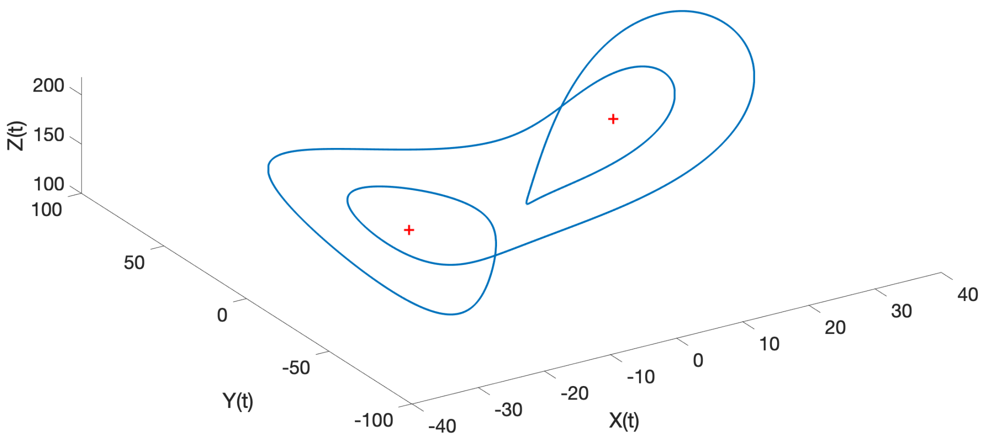



Abbildung 8: Periodische Lösung der Lorenz-Gleichungen (2) für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $\rho = 160$, $\beta = \frac{8}{3}$ und Anfangswerte $X(0) = 0$, $Y(0) = 1$, $Z(0) = 0$, für $t \in [10, 15]$.

bleibt auch für grosse Zeiten innerhalb einer gewissen Struktur erhalten. Diese Strukturen, die beispielsweise vom **Lorenz-Attraktor** beschrieben werden können, dessen Umrisse in 6 zu sehen sind, bleiben ebenso für grosse Zeiten erhalten. Damit lässt sich mathematisch etwas Ordnung in diesen chaotischen Systemen beschreiben.

## Abgabe

Die Abgabe des Projektes soll per Email bis zum 19.12.2021, 23:59 Uhr, erfolgen.
Hierzu soll eine Dokumentation in LaTeX angefertigt werden, welche die Lösungen der Aufgaben 1 bis 3 und nachfolgend alle geschriebenen Quelldateien enthält. Den Matlab-Code, den du erstellt hast, sollst du in einzelne Listings in deine Dokumentation einfügen, den Maple-Code als PDF anfügen (siehe dazu auch diesen Link). Eine Vorlage für die Dokumentation findest du in `beilage.zip` auf der Webseite der Vorlesung. Die Kommentare in der Vorlage helfen dir, das Richtige einzufügen.
Zusätzlich zur Dokumentation muss ein Beamer-Folienvortrag von drei bis sechs Folien, welche die Implementierung und die Ergebnisse zeigen sollen, in der Woche nach der Abgabe gehalten werden.
Die Dokumentation, der Folienvortrag sowie die Quelldateien werden dabei wie folgt abgegeben: Es soll eine Email mit dem Betreff `Praktikum Projekt Abgabe` bis 19.12.2021, 23:59 Uhr an `merlin.fallahpour-at-unibas.ch` abgeschickt werden, welche eine angehängte `zip`-Datei mit dem Dateinamen `nachname-vorname.zip` hat. In dieser `zip`-Datei sollen

- die Dokumentation als `pdf`-Datei mit Dateinamen `nachname-vorname-doku.pdf` und als `.tex`-Datei inklusive Abbildungen,
- die Vortragsfolien als `pdf`-Datei mit Dateinamen `nachname-vorname-vort.pdf` und als `.tex`-Datei inklusive Abbildungen,
- und ein Ordner mit Namen `nachname-vorname-code`, der die Quelldateien (d.h. alle .m-Files inklusive Test-Skripts und alle .mw-Files inklusive PDF) enthält,

enthalten sein.

## Vortragstermine

Die Vorträge finden in der Woche 51 vom 20.12.2021 bis 23.12.2021 während des Praktikums einzeln über Zoom statt. Die Einteilung wird per Email verschickt. Bitte halte den Legi bereit. Eine funktionierende Kamera und Mikrophon sind Pflicht. Deine Präsentation sollte 4-5 Minuten dauern, damit du noch 4-5 Minuten Fragen dazu beantworten kannst. Halte dazu deine Folien bereit und auch den Matlab- und Maple-Code.

---

Allgemeine Informationen zum Praktikum befinden sich auf der Webseite
`http://cm.dmi.unibas.ch/teaching/praktikumI/praktikumI.html`