Mathematik am Computer

Maple, Teil II

Marcus Grote und Helmut Harbrecht

Universität Basel

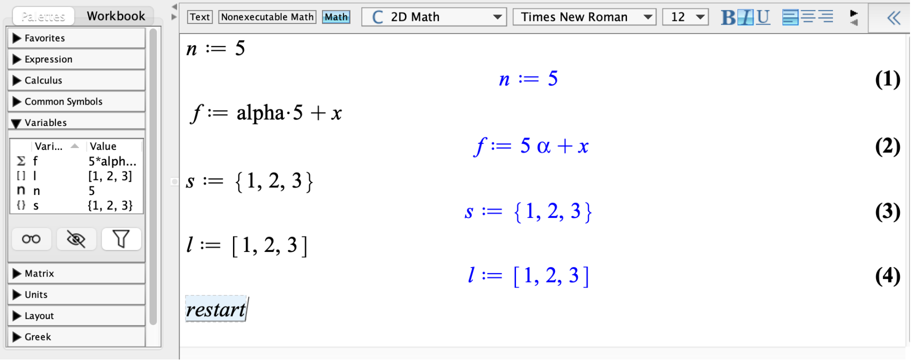
13. – 17. Dezember 2021

Übersicht

1. Maple-workspace
2. Symbolisches Differenzieren und Integrieren von Funktionen
3. Grenzwerte und Folgen
4. Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Maple-Variablen und `restart`

Wenn eine neue Maple Datei erstellt wird oder eine geöffnet wird, ist der Variablen-Workspace leer. Die Variablen werden durch das Ausführen von Befehlen definiert.



Um diesen wieder zu leeren wird der Befehl `restart` benutzt.

Differenzieren von Funktionen

Differenzieren mittels `diff`: Aus der Maple-Hilfe:

```
diff or Diff - Differentiation or Partial
Differentiation

Calling Sequence
     diff(f, x1, ..., xj)
     diff(f, [x1$n])
     diff(f, x1$n, [x2$n, x3], ... xi, [xj$m])
```

Vorgriff auf die Analysis II: Was bedeutet „Partial Differentiation“?

Differenzieren von Funktionen

Beispiel: Eine Funktion f hängt nicht nur von x, sondern 2 Variablen x_1 und x_2 ab:

$$f = f(x_1, x_2), \quad \text{z.B.} \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Dann kann man nach einer der Komponenten von $x = (x_1, x_2)$ differenzieren, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_2,$$

da x_1 nicht von x_2 abhängt, d.h. x_1 ist bzgl. x_2 eine Konstante.

Beispiele:

- `diff(x1^2+x2^2,x2);`
- `diff(sin(x),x);`
- `diff(sin(x),x$2);`
- `diff(f(x)*g(x),x);`
- `diff(x^a,x);`

Symbolisches Rechnen: Differenzieren

Was bedeutet „Diff“ im Gegensatz zu „diff“ ?
Die Eingabe von

```
Diff(tan(x),x) = diff(tan(x),x);
```

ergibt die Ausgabe

$$\frac{d}{dx}\tan(x) \;=\; 1 + tan(x)^2, \tag{1}$$

d.h. „Diff“ ist nur für eine (für Mathematiker) schöne Ausgabe zuständig.

Differenzieren von Funktionen

Text Math | 2D Output | Times New Roman | 26

Erste Ableitung von sin(x):

$diff(\sin(x), x);$

$$\cos(x) \tag{1}$$

Zweite Ableitung von sin(x):

$diff(\sin(x), x\$2);$

$$-\sin(x) \tag{2}$$

Produktregel:

$diff(f(x) \cdot g(x), x);$

$$\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) g(x) + f(x) \left(\frac{d}{dx} g(x)\right) \tag{3}$$

Ableitung von x^a:

$diff(x^a, x);$

$$\frac{x^a\, a}{x} \tag{4}$$

Ableitung von tan(x):

$Diff(\tan(x), x);$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) \tag{5}$$

$diff(\tan(x), x);$

$$1 + \tan(x)^2 \tag{6}$$

Der Zusammenhang zwischen `diff` und `int`

Entsprechend

$$\int f(x)dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$$

ist `diff` die Umkehrabbildung zu `int`, d.h. die Nacheinanderanwendung von `diff` und `int` ergibt den ursprünglichen Ausdruck, z.B. liefert die Eingabe von

```
diff(int(f(x),x),x);
```

die Funktion $f(x)$ zurück, auch wenn diese nicht explizit gegeben ist.

Unbestimmtes Integrieren

Einfache Beispiele:

```
int(x^a, x);
```

$$\frac{x^{a+1}}{a+1} \qquad (1)$$

```
int(cos(x), x);
```

$$\sin(x) \qquad (2)$$

```
int(ln(x), x);
```

$$x\ln(x) - x \qquad (3)$$

```
int(x/(x^4-1), x);
```

$$\frac{\ln(x-1)}{4} + \frac{\ln(x+1)}{4} - \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{4} \qquad (4)$$

Integrale, die Maple nicht symbolisch berechnen kann, werden als Integral zurückgegeben:

```
int(exp(-x^2)*ln(x), x);
```

$$\int e^{-x^2} \ln(x)\, dx \qquad (5)$$

Bestimmte Integrale und `evalf`

Hat man eine Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$ bestimmt, gilt

$$\texttt{int(f, x=a..b)} \mathrel{\hat{=}} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Alternative:

```
F:=int(f(x),x); subs(x=b,F)-subs(x=a,F);
```

Sind die Integralgrenzen a und b *Parameter* und zunächst beliebig $\longrightarrow$ symbolisches Rechnen.

Seien jetzt die Integralgrenzen a und b gegeben. 2 mögliche Varianten:

V 1: Bestimme eine Stammfunktion, setze dann die Zahlen ein.
Problem: nicht für jede Funktion f ist eine Stammfunktion F bekannt.

V 2: Aufruf von `int` mit Intervalgrenzen a und b und `evalf`. Dann sind auch Integrale berechenbar, die symbolisch es nicht waren.

$\rightsquigarrow$ numerische Approximation von Integralen

(siehe “Einführung in die Numerik”)

Bestimmte Integrale und `evalf`

Bestimmte Integrale:

```
int(cos(x), x = a..b);
```

$$-\sin(a) + \sin(b) \qquad (1)$$

```
int(sin, a..b);
```

$$\cos(a) - \cos(b) \qquad (2)$$

```
F := int(cos(x), x); subs(x = b, F) - subs(x = a, F);
```

$$F := \sin(x)$$

$$-\sin(a) + \sin(b) \qquad (3)$$

Bestimmte Integrale mit Zahlen:

```
int(exp(-x^2) * ln(x), x = 0..1);
```

$$\int_0^1 e^{-x^2} \ln(x)\, dx \qquad (4)$$

```
evalf(%);
```

$$-0.9059404763 \qquad (5)$$

Grenzwerte mit Maple berechnen

Zur Bestimmung von Grenzwerten gibt es den Befehl `limit`:

`limit(f(x), x=a, dir)` $\hat{=} \lim_{x \to a} f(x)$

```
Parameters
f    - algebraic expression
x    - name
a    - algebraic expression; limit point,
       possibly infinity, or -infinity
dir  - (optional) symbol;
       direction chosen from:
       left, right, real, or complex
```

Beispiele:

- Grenzwert von $\sin(x)/x$ für $x \to 0$ (via l'Hospital):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

  Maple: `limit(sin(x)/x,x=0);`

- Grenzwert von e^x für $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty$$

  Maple: `limit(exp(x),x=infinity);`

Rechnen mit Matrizen

Zusatzpaket: `with(LinearAlgebra):`

- Definition von Matrizen: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
  - `A:= <<1,3>|<2,4>>;`
  - `A:= Matrix(2, 2, [1,2,3,4];`
  - `A:= Matrix(2, 2, [[1,2],[3,4]]);`
- Element der Matrix: `A[1,2];`
- Definition von Vektoren: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$:
  - `<5,6>;`
  - `Vector([5, 6]);`

Rechnen mit Matrizen

- Multiplikation (**Ab**): `A.b;` oder `Multiply(A,b);`
- Inverse Matrix: `A^(-1);` oder `MatrixInverse(A);`
- Determinant: `Determinant(A);`
- Transponiert: `Transpose(A);`
- Spur: `Trace(A);`

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Das Zusatzpaket `VectorCalculus` stellt einige Zusatzbefhle zur Behandlung von Vektoren zur Verfügung. Eine kleine Auswahl:

- Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

  Dabei seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten bzgl. der Einheitsbasis.

  Entsprechung in Maple: `DotProduct(a, b)`.

  Beispiel:

```
with(VectorCalculus):
DotProduct(<a1,a2>,<b1,b2>);
```

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

- Norm („Betrag“) eines Vektors $\vec{a}$ der Dimension n:

$$||\vec{a}||_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}$$

für $p < \infty$ bzw.

$$||\vec{a}||_\infty := \max_{p=1,\ldots,n} |a_i|$$

Entsprechung in Maple: `Norm(a, p)`.

Beispiele:

  - Euklidischer Abstand ($p = 2$):
    `Norm(<1,0,1>,2)`
  - Maximum-Norm ($p = \infty$):
    `Norm(<-3,0,1,2>,infinity);`

Lineare Algebra und Geometrie mit Maple

Lösen eines linearen Gleichungssystems:

$$\mathbf{V}\vec{b} = \vec{a}$$

mit einer Matrix $\mathbf{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Realisierung in Maple:

```
with(LinearAlgebra):
a:=<a1,a2>;
v1:=<1,1>;
v2:=<0,1>;
V:=<v1|v2>;
LinearSolve(V,a);
```