UNIVERSITÄT BASEL

Einführung in die Optimierung

Frühjahrsemester 2011
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 9.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 11.5.2011**.

Aufgabe 1. (Projektionen)

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge und $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \to C$ die (orthogonale) Projektion auf C, das heisst für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}) = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{v} \in C} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathbf{P}$ ist wohldefiniert.

b) Falls C ein Unterraum ist, gilt $(\mathbf{w} - \mathbf{P}(\mathbf{w}))^T \mathbf{v} = 0$ für alle $\mathbf{v} \in C$.

c) Für beliebige $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}(\mathbf{w}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \in C \text{ und } (\mathbf{w} - \mathbf{v})^T (\mathbf{z} - \mathbf{v}) \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{z} \in C.$$

d) $\mathbf{P}$ ist nicht expansiv, das bedeutet für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{w}) - \mathbf{P}(\mathbf{v})\|_2 \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{2}}.$$

Die Projektion ist allerdings nicht kontraktiv. Finden Sie hierzu ein Gegenbeispiel, mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \notin C$.

e) $\mathbf{P}$ ist monoton, das heisst für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(\mathbf{P}(\mathbf{w}) - \mathbf{P}(\mathbf{v}))^T (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \geq \|\mathbf{P}(\mathbf{w}) - \mathbf{P}(\mathbf{v})\|_2^2 \geq 0$$

und Gleichheit gilt genau dann, falls $\mathbf{P}(\mathbf{w}) = \mathbf{P}(\mathbf{v})$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Konvexität)

a) Seien für $m \geq 1$ die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Sei ferner

$$K := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}_i,\ \alpha_i \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

ein Kegel. Zeigen Sie, dass K konvex und abgeschlossen ist.

b) Seien $X_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 \geq 1/x_1\}$ und $X_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 abgeschlossen und konvex sind, dass die punktweise Summe $X_1 + X_2$ aber eine offene konvexe Menge ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (KKT-Bedingungen)

Stellen Sie die KKT-Bedingungen für die folgenden Optimierungsprobleme auf:

a)
$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{unter der Nebenbedingung } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

b)
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{unter der Nebenbedingung } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

c)
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{unter der Nebenbedingung } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

d)
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{x}\geq\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) \quad \text{unter der Nebenbedingung } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$
mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathbf{g} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Optimierung unter Nebenbedingungen)

a) Lösen Sie das Optimierungsproblem
$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} (x_1-3)^2 + x_2^2 \quad \text{unter den Nebenbedingungen} \quad \begin{aligned} -x_1 + (x_2-1)^3 &\geq 0,\\ x_2 &\leq 1,\\ x_1, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$
geometrisch und überprüfen Sie im Lösungspunkt die KKT-Bedingungen.

b) Betrachten Sie die Menge
$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_2^3 + x_3 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_1 \leq 1\}.$$
Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}^\star = [0,0,0]^T$ eine Lösung für das Problem
$$\min_{\mathbf{x}\in X} x_2$$
ist. Sind in $\mathbf{x}^\star$ die KKT-Bedingungen erfüllt?

c) Bestimmen Sie den Abstand der Menge
$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 4,\ 2x_1 + x_2 \geq 5\}$$
vom Koordinatenursprung.

(4 Punkte)