UNIVERSITÄT BASEL

Einführung in die Optimierung

Frühjahrsemester 2011

Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 6.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 13.4.2011**.

Aufgabe 1. (Krylov-Räume)

Zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ seien die zugehörigen Krylov-Räume definiert als

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}) := \operatorname{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \ldots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}\} \quad \text{für k=1,2,}\ldots$$

a) Sei Π_m für $m \in \mathbb{N}$ der Raum aller rellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich m. Zeigen Sie, dass für $k \geq 1$

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = p(\mathbf{A})\mathbf{v} \text{ mit } p \in \Pi_{k-1}\}$$

gilt.

b) Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heisst

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{ es existiert } p \in \Pi_k \setminus \{0\} \text{ mit } p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

der *Grad* von $\mathbf{v}$ bezüglich $\mathbf{A}$. Das zugehörige monische Polynom $p \in \Pi_m$, welches $p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ erfüllt, wird *Minimalpolynom* von $\mathbf{v}$ bezüglich $\mathbf{A}$ genannt.

Sei $l \leq k$ der Grad des Minimalpolynoms von $\mathbf{v}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \mathcal{K}_l(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } k \geq l$$

gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Lucky Breakdown)

Unter gewissen Voraussetzungen liefert das lineare CG-Verfahren bereits nach $k \ll n$ Schritten die exakte Lösung, was

$$\mathbf{x}^\star \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0), \text{ also } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_0 \in \mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0)$$

bedeutet. Zeigen Sie, dass dies genau dann der Fall ist, wenn der Grad des Minimalpolynoms von $\mathbf{r}_0$ gleich k ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (CG/BFGS-Verfahren)

Gegeben sei die quadratische Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

mit symmetrisch positiv definiter Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann das lineare CG-Verfahren und das Quasi-Newton-Verfahren (Algorithmus 4.1) mit BFGS-Update übereinstimmen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

i) Zeigen Sie zunächst, dass für das CG-Verfahren, die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_0^{\text{CG}} &= -\nabla f(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{d}_k^{\text{CG}} &= -\nabla f(\mathbf{x}_k) + \frac{(\nabla f(\mathbf{x}_k) - \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}))^T \nabla f(\mathbf{x}_k)}{(\nabla f(\mathbf{x}_k) - \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}))^T \mathbf{d}_{k-1}^{\text{CG}}} \mathbf{d}_{k-1}^{\text{CG}}, \qquad \text{für } k > 1.\end{aligned}$$

ii) Zeigen Sie induktiv, dass $\mathbf{H}_l \nabla f(\mathbf{x}_k) = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ für alle $l < k < n$ gilt.

iii) Verwenden Sie nun i) und ii) um zu zeigen, dass für die Suchrichtungen des linearen CG-Verfahrens und des BFGS-Verfahrens die Identitäten $\mathbf{d}_k^{\text{BFGS}} = \mathbf{d}_k^{\text{CG}}$ für $k \geq 0$ gelten.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Invarianz des CG-Verfahrens)

Sei $\mathbf{x}_k$ die k-te Iterierte des linearen CG-Verfahrens angewandt auf $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$. Wir setzen

$$\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^T, \quad , \tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{V}\mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{V}\mathbf{x}.$$

Zeigen Sie: Wird das lineare CG-Verfahren mit Startvektor $\tilde{\mathbf{x}}_0 := \mathbf{V}\mathbf{x}_0$ auf das Gleichungssystem $\widetilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$, so gilt

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{V}\mathbf{x}_k, \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots.$$

(4 Punkte)