UNIVERSITÄT BASEL

Einführung in die Optimierung

Frühjahrsemester 2011
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 5.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 6.4.2011**.

Aufgabe 1. (Quasi-Newton-Gleichung)

Verifizieren Sie die Quasi-Newton-Gleichung (Satz 4.2)

$$\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{q}_k = \mathbf{p}_k.$$

Dabei sei $\mathbf{H}_k$ wie in der Vorlesung durch die Rekursion

$$\mathbf{H}_{k+1} := \Phi(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k, \gamma_k, \nu_k)$$

gegeben.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Sherman-Morrison-Woodbury-Formel)

a) Seien $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien regulär. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{M} := \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

genau dann invertierbar ist, falls

$$\mathbf{W} := \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$$

invertierbar ist und dass im Falle der Existenz von $\mathbf{M}^{-1}$ die folgende Formel gilt:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}.$$

Hinweis: Multiplizieren Sie die Formel mit $\mathbf{M}$.

b) Übertragen Sie das Resultat auf den Fall einer Rang-1-Modifikation $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ mit invertierbarer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, um zu zeigen:

$\mathbf{M}$ ist genau dann invertierbar, wenn $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist dann

$$\mathbf{M}^{-1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)\mathbf{A}^{-1}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (BFGS-Verfahren)

a) Zeigen Sie, dass sich für die Wahl $\gamma_k \equiv 1$ und $\nu_k \equiv 1$ die Rekursionsformel Φ für $\mathbf{H}_{k+1}$ vereinfacht zu

$$\Phi(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k) = \mathbf{V}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{V}_k + \rho_k \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^T$$

wobei $\mathbf{V}_k = \mathbf{I} - \rho_k \mathbf{q}_k \mathbf{p}_k^T$ und $\rho_k = 1/(\mathbf{p}_k^T \mathbf{q}_k)$ gilt.

b) Betrachten Sie folgenden Algorithmus zur Bestimmung der Suchrichtungen $\mathbf{d}_k$:

Algorithmus $\mathbf{v} = \texttt{bfgsrek}(k, \mathbf{w})$

1. Falls $k = 0$ gilt, setze $\mathbf{v} = \mathbf{H}_0 \mathbf{w}$.
2. Berechne $\rho = 1/(\mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{q}_{k-1})$, $\alpha = \rho \mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{w}$ und $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w} - \alpha \mathbf{q}_{k-1}$.
3. Berechne $\mathbf{w}_2 = \texttt{bfgsrek}(k-1, \mathbf{w}_1)$.
4. Berechne $\mathbf{v} = \mathbf{w}_2 + (\alpha - \rho \mathbf{q}_{k-1}^T \mathbf{w}_2) \mathbf{p}_{k-1}$.

Zeigen Sie, dass die Rekursion $\mathbf{v} = \mathbf{H}_k \mathbf{w}$ liefert.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Zusammenhang DFP/BFGS-Verfahren)

Für die Wahl $\gamma_k \equiv 1$ und $\nu_k \equiv 0$ erhält man das DFP-Verfahren. Zeigen Sie, dass für die Rekursionsformel Φ^{DFP} gilt:

$$[\Phi^{\text{DFP}}(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k)]^{-1} = \Phi^{\text{BFGS}}(\mathbf{H}_k^{-1}, \mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(4 Punkte)