## Übungsblatt 4.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 30.3.2011**.

**Aufgabe 1.** (Trust-Region-Verfahren I)

Sei $F(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x}$ mit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zu $F$ und dem Trust-Region-Radius $\Delta > 0$ gehört das Trust-Region-Problem

$$\min\{F(\mathbf{x}) \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq \Delta\}.$$

Sei $\mathbf{x}^\star$ die zugehörige Optimallösung. Betrachten Sie die Bedingungen

(i) $\lambda^\star \geq 0$, $\|\mathbf{x}^\star\|_2 \leq \Delta$, $\lambda^\star(\Delta - \|\mathbf{x}^\star\|_2) = 0$,

(ii) $(\mathbf{A} + \lambda^\star\mathbf{I})\mathbf{x}^\star = -\mathbf{b}$,

(iii) $\mathbf{A} + \lambda^\star\mathbf{I}$ ist positiv semidefinit.

Zeigen Sie:

a) Falls $\|\mathbf{x}^\star\|_2 < \Delta$ gilt, so erfüllen $\mathbf{x}^\star$ und $\lambda^\star = 0$ die Bedingungen (i)–(iii).

b) Sei $\|\mathbf{x}^\star\|_2 = \Delta$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{v} + \mathbf{x}^\star\|_2 \leq \Delta$. Dann gilt $(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{x}^\star)^T\mathbf{v} \geq 0$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.** (Trust-Region-Verfahren II)

Zeigen Sie (i)–(iii), falls $\|\mathbf{x}^\star\|_2 = \Delta$ gilt.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.** (Optimierungsverfahren unter affiner Transformation)

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zudem existiere ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\nabla^2 F(\mathbf{x})$ positiv definit ist. Sei ferner $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Die neue Iterierte $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \mathbf{d}$ berechne sich wie folgt:

1. Wechsel des Koordinatensystems $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}) := \mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{v}$.
2. Gradientenschritt im „$\mathbf{y}$"-Koordinatensystem: $\mathbf{y}^+ := \mathbf{y} - \nabla_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$.
3. Rücktransformation auf „$\mathbf{x}$"-Koordinaten: $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}(\mathbf{y}^+)$.

a) Geben Sie eine Formel für $\mathbf{d}$ an, die lediglich von $\mathbf{M}$ und $\nabla F(\mathbf{x})$ abhängt.

b) Wie ist $\mathbf{M}$ zu wählen, damit es sich bei $\mathbf{d}$ um einen Gradientenschritt für $F$ im Punkt $\mathbf{x}$ handelt? Für welche $\mathbf{M}$ entspricht $\mathbf{d}$ einem Newton-Schritt im Punkt $\mathbf{x}$?

(4 Punkte)

**Aufgabe 4.** (Newton-Verfahren)

Sei $f(x) = -\frac{1}{4}x^4$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren (Algorithmus 3.1) für jeden beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen das eindeutige Maximum $x^\star = 0$ konvergiert.

(4 Punkte)