UNIVERSITÄT BASEL

Einführung in die Optimierung

Frühjahrsemester 2011
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 3.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 23.3.2011**.

Aufgabe 1. (Newton-Verfahren für Minimierungsprobleme)

Gegeben sei die Abbildung $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass eine Nullstelle von $\mathbf{f}$ auch Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} F(\mathbf{x}) := \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2$$

ist. Zeigen Sie umgekehrt, dass jede lokale Lösung $\mathbf{x}^*$ des Minimierungsproblems mit $F(\mathbf{x}^*) = 0$ eine Nullstelle von $\mathbf{f}$ ist.

b) Sei $\mathbf{x}$ ein Punkt, für den $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ invertierbar ist und $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ gilt. Zeigen Sie, dass dann die Richtung des Newton-Verfahrens

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

eine Abstiegsrichtung ist, dass also $\nabla F(\mathbf{x})^T(-\mathbf{f}'(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})) < 0$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Divergenz des Newton-Verfahrens für schlechte Startpunkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x - \log|x|$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für welche Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert das Newton-Verfahren zur Minimierung dieser Funktion gegen das lokale Minimum $x = 1$?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Vereinfachtes Newton-Verfahren I)

Betrachten Sie das durch die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \nabla^2 f(\mathbf{x}_0)^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_k)$$

gegebene vereinfachte Newton-Verfahren. Sei hierzu $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und besitze einen stationären Punkt $\mathbf{x}^*$, an dem $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ positiv definit ist. Zeigen Sie, dass dann ein $\delta > 0$ existiert, so dass das vereinfachte Newton-Verfahren für jeden Startwert $\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|_2 < \delta\}$ eine Folge $\{\mathbf{x}_k\}$ definiert, die linear gegen $\mathbf{x}^*$ konvergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Vereinfachtes Newton-Verfahren II)

Sei $f(x) = x^2 + x$. Zeigen Sie für den Startwert $x_0 = 1$, dass das vereinfachte Newton-Verfahren

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

linear gegen die Nullstelle $x^* = 0$ konvergiert.

(4 Punkte)