UNIVERSITÄT BASEL

Einführung in die Optimierung

Frühjahrssemester 2011
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 2.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 9.3.2011**.

Aufgabe 1. (Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite)

Betrachten Sie das durch die Vorschrift

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \sigma \nabla f(\mathbf{x}^k)$$

gegebene Gradientenverfahren mit fester Schrittweite $\sigma > 0$.

a) Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{3/2}$. Zeigen Sie, dass es kein $L > 0$ gibt, so dass

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Beweisen Sie weiterhin, dass dieses Verfahren entweder nach endlich vielen Schritten das Optimum $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ erreicht oder es nicht gegen $\mathbf{x}^*$ konvergiert.

b) Sei f nun definiert als $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2+\beta}$ mit $\beta > 0$. Geben Sie Bedingungen für σ und $\mathbf{x}_0$ an, für die das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite konvergiert, beziehungsweise divergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Konvergenz des Gradientenverfahrens)

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und die Niveaumenge $N_f(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\}$ sei kompakt. Zeigen Sie: Falls das Gradientenverfahren (Algorithmus 2.4) mit Startpunkt $\mathbf{x}_0$ nicht endlich terminiert, so erzeugt es eine Folge $\{\mathbf{x}_k\}_{k\geq 0}$, die mindestens einen Häufungspunkt in $N_f(\mathbf{x}_0)$ besitzt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Radial unbeschränkte Funktionen)

Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = \infty$ und beliebiges $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge $N_f(\mathbf{w})$ kompakt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Rosenbrock-Funktion)

Führen Sie für die Rosenbrock-Funktion

$$f(x_1, x_2) := 100(x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$$

ausgehend von $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ einen Schritt des idealisierten Gradientenverfahrens durch. Mit welcher Konstanten μ ist hierbei die Armijo-Goldstein-Bedingung erfüllt?

(4 Punkte)