Übungsblatt 11.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 25.5.2011**.

Aufgabe 1. (Sattelpunktprobleme)

Vorgelegt sei die Matrix

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

Gehen Sie davon aus, dass $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrisch positiv semidefinit ist, sowie $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ vollen Rang hat. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ dann n positive und m negative Eigenwerte hat.

Hinweis. Verwenden Sie den Sylvesterschen Trägheitssatz.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Bramble-Pasciak-CG)

Nach Aufgabe 1 ist die dort definierte Matrix $\mathcal{A}$ indefinit. Um dennoch ein CG-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems für $\mathcal{A}$ anwenden zu können, behilft man sich, wie folgt:
Zunächst sucht man eine Matrix $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$0 < \mathbf{x}^T\mathbf{A}_0\mathbf{x} < \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Nun bildet man $\mathcal{S} = \mathcal{T}\mathcal{A}$ mit

$$\mathcal{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}_0^{-1} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}.$$

Definiert man jetzt die Matrix

$$\mathcal{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)},$$

so lässt sich zeigen, dass $\mathcal{S}$ im von $\mathcal{M}$ induzierten Innenprodukt symmetrisch und positiv definit ist, das heisst

$$\langle \mathcal{S}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathcal{M}} = \langle \mathbf{x}, \mathcal{S}\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{M}} \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(n+m)}$$

und

$$0 < \langle \mathcal{S}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle_{\mathcal{M}} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Dabei ist

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathcal{M}} := \mathbf{x}^T\mathcal{M}\mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(n+m)}.$$

a) Zeigen Sie, dass eine solche Matrix $\mathbf{A}_0$ immer existiert.

b) Weisen Sie die Symmetrie der Matrix $\mathcal{S}$ bezüglich des $\mathcal{M}$-Innenprodukts nach.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Tangentialkegel)

Sei zu $\mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$, einem Punkt der zulässigen Menge G, der Tangentialkegel $T_G(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}$ gegeben. Betrachten Sie die Menge

$$\widetilde{T}_G(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : (\exists\ \{t_k\}_{k\geq 0} \searrow 0,\ \{\mathbf{x}_k\}_{k\geq 0} \subset G\ :\ \mathbf{x}_k \to \mathbf{x} \text{ und } (\mathbf{x}_k - \mathbf{x})/t_k \to \mathbf{y})\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}_G(\mathbf{x})$ ein Kegel ist.

b) Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}_G(\mathbf{x}) = T_G(\mathbf{x})$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Tangentialkegel bei linearen Nebenbedingungen)

a) Betrachten Sie das restringierte Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedingungen

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{Cx} \geq \mathbf{d}$$

mit $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ und $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie die zulässige Menge G. Zeigen Sie, dass $K(\mathbf{x}) \subset T_G(\mathbf{x})$ gilt, wobei $K(\mathbf{x})$ den Linearisierungskegel an $\mathbf{x}$ bezeichne.

Bemerkung. Hieraus kann man ableiten, dass im Falle linearer Restriktionen stets $K(\mathbf{x}) = T_G(\mathbf{x})$ gilt.

b) Sei nun das allgemeinere restringierte Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \qquad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$$

mit $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{h}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar gegeben. Für ein festes, zulässiges $\overline{\mathbf{x}} \in G$ ergibt sich das, die Nebenbedingungen linearisierende Problem zu

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \qquad \mathbf{h}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{g}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{g}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}(\overline{\mathbf{x}}) + \nabla\mathbf{g}(\overline{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ und $\mathbf{h}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) := \mathbf{h}(\overline{\mathbf{x}}) + \nabla\mathbf{h}(\overline{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$. Zeigen Sie, dass der Linearisierungskegel des ursprünglichen Problems mit dem Linearisierungskegel des linearisierten Problems übereinstimmt.

c) Folgern Sie aus Aufgabenteil b), dass für $\overline{\mathbf{x}} \in G$ der Linearisierungskegel $K(\overline{\mathbf{x}})$ mit dem Tangentialkegel $T_{G_{\text{lin}}}(\overline{\mathbf{x}})$ des linearisierten Problems mit der zulässigen Menge G_{lin} übereinstimmt.

(4 Punkte)