UNIVERSITÄT BASEL

Einführung in die Optimierung

Frühjahrsemester 2011
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 10.

zu bearbeiten bis **Mittwoch, 18.5.2011**.

Aufgabe 1. (Berechnung der Projektion bei Box-Constraints)

Bei der Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$$

mit $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ mittels des projizierten Gradientenverfahrens, ist die Projektion auf die zulässige Menge zu bestimmen. Dies führt auf ein restringiertes, quadratisches Minimierungsproblem, da

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{l}\leq\mathbf{y}\leq\mathbf{u}} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2$$

bestimmt werden muss. Dabei ist die $\leq$-Relation im Zusammenhang mit Vektoren komponentenweise zu verstehen.

a) Formulieren Sie das zugehörige Minimierungsproblem.

b) Im hier vorliegenden Spezialfall der *Box-Constraints*, das bedeutet, das die Nebenbedingung genau einem Quader entspricht, lässt sich die Projektion komponentenweise berechnen durch

$$[\mathbf{P}(\mathbf{x})]_i = \begin{cases} x_i, & \text{falls } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i, & \text{falls } x_i > u_i, \\ l_i, & \text{falls } x_i < l_i. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass hierdurch tatsächlich die Projektion berechnet wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Minimierung unter affinen Nebenbedingungen I)

Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \mathbf{C}^T\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

zu einer Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $m \leq n$ und einem Vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$. Die Matrix $\mathbf{C}$ mit den Spalten $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ besitze vollen Spaltenrang. Sei $\mathbf{x}^\star$ eine Lösung des Optimierungsproblems. Zeigen Sie, dass dann gilt $\mathbf{x}^\star = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}$, wobei $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m$ Lösung der Gleichung

$$\mathbf{G} := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_1 & \ldots & \mathbf{c}_1^T\mathbf{c}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_m^T\mathbf{c}_1 & \ldots & \mathbf{c}_m^T\mathbf{c}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}$$

ist. Die Matrix $\mathbf{G}$ wird hierbei als *Gram'sche Matrix* bezeichnet.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Minimierung unter affinen Nebenbedingungen II)

Vorgelegt sei das Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2 - t)^4 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \begin{bmatrix} 1 - x_1 - x_2 \\ 1 - x_1 + x_2 \\ 1 + x_1 - x_2 \\ 1 + x_1 + x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

wobei der Parameter $t \in \mathbb{R}$ noch zu bestimmen ist.

a) Für welche Werte von t erfüllt der Punkt $\mathbf{x}^\star = [1, 0]^T$ die KKT-Bedingungen?

b) Zeigen Sie, dass für $t = 1$ nur die erste Nebenbedingung an der Lösung aktiv ist und finden Sie die Lösung.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Minimierung unter nichtlinearer Nebenbedingung)

Zu bestimmen ist der Punkt auf der Parabel $x_2 = 1/5(x_1 - 1)^2$, der minimalen euklidischen Abstand zum Punkt $\mathbf{x} = [1, 2]^T$ besitzt.

a) Stellen Sie das zugehörige restringierte Optimierungsproblem auf.

b) Finden Sie alle Punkte, die die KKT-Bedingungen erfüllen.

c) Welche dieser Punkte sind Lösungen?

d) Durch Substitution der Nebenbedingung in die Zielfunktion und Eliminierung der Variable x_1 erhält man ein unrestringiertes Optimierungsproblem. Zeigen Sie, dass die Lösungen dieses Problems keine Lösungen des ursprünglichen Problems sein können.

(4 Punkte)