



## Übungsblatt 9.

Abgabe bis: Montag, 16.05.2022, 14:15 Uhr

**Aufgabe 1** (Zusammengesetzte  $\frac{3}{8}$ -Regel | 4 Punkte).

Auf dem Intervall  $[0, 1]$  seien das Integral

$$I[f] = \int_0^1 f(x) dx$$

und die  $\frac{3}{8}$ -Regel

$$I[f] \approx Q_{\frac{3}{8}}[f] := \frac{1}{8} \left( f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) \right)$$

gegeben.

- Stellen Sie die zusammengesetzte  $\frac{3}{8}$ -Regel  $Q_{\frac{3}{8},N}$  für  $N$  Teilintervalle so auf, dass sie jeden Funktionswert nur einmal berechnen müssen.
- Berechnen Sie  $Q_{\frac{3}{8},N}[f]$  für  $f(x) := \sin(\pi x)$  und  $N = 2$  Teilintervalle.

**Aufgabe 2** (Exaktheitsgrad | 4 Punkte).

Betrachten Sie auf dem Intervall  $[0, 1]$  die Quadraturformel

$$Q[f] := w_0 f\left(\frac{1}{4}\right) + w_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_2 f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Bestimmen Sie die Gewichte  $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$  derart, dass die Quadraturformel den maximalen Exaktheitsgrad hat. Wie lautet dieser?

**Aufgabe\* 3** (Korrigierte Trapezregel | 4 Punkte). Für eine Funktion  $f \in C^1([a, b])$  ist die *korrigierte Trapezregel* gegeben durch

$$Q[f] := \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12} (f'(a) - f'(b)).$$

Welchen Exaktheitsgrad besitzt die korrigierte Trapezregel? Wie sieht die zugehörige korrigierte Trapezsumme aus?

**Aufgabe\* 4** (Tschebyscheff-Polynome | 4 Punkte).

- Berechnen Sie aus  $T_0(x) := 1$  und  $T_1(x) := x$  mit Hilfe der Drei-Term-Rekursion

$$T_k(x) := 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad \text{für } k \geq 2$$

die sogenannten *Tschebyscheff-Polynome*  $T_k$  für  $k = 0, \dots, 5$ .

- Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, dass sich die Tschebyscheff-Polynome explizit als

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$$

angeben lassen.

(c) Zeigen Sie mittels der Darstellung  $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_\ell(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ \pi & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}$$

**Programmieraufgabe 5** (Gauss-Legendre-Quadratur | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten pdf-Datei ein.