Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Montag, 09.05.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Fehler numerischer Integration | 4 Punkte).

Betrachten Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{4-x}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an das Integral mittels der Trapezregel und der Simpson-Regel. Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals.

(b) Auf dem Intervall (a, b) sei die zusammengesetzte Trapezregel gegeben als

$$T_N[f] = \frac{h}{2}f(x_0) + h\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{h}{2}f(x_N),$$

mit $h = \frac{b-a}{N}$ und $x_k = a + kh$ für $k = 0, 1, \dots, N$. Bestimmen Sie eine Approximation an das Integral mittels der zusammengesetzten Trapezregel über $N = 4$ Teilintervalle. Schätzen Sie den Fehler mithilfe von Satz 6.1 ab.

Aufgabe 2 (Konvergenz und Exaktheitsgrad | 4 Punkte).

Auf dem Intervall $I = [0, 1]$ sei eine Quadraturformel

$$Q[f] := \sum_{j=1}^{m} w_j f(t_j)$$

mit Knoten (t_j) und Gewichten (w_j) sowie mit Exaktheitsgrad q gegeben. Wir definieren dann für $h = \frac{1}{N}$ und $x_k = kh$ die zusammengesetzte Quadraturformel

$$Q_N[f] := h\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{m} w_j f(x_k + ht_j).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$I[f] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = h\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 f(x_k + th)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Sei nun $f \in C^{q+1}([0, 1])$. Mit dem Satz von Taylor gilt dann

$$f(x_k + \tau) = p_k(\tau) + \tau^{q+1} r_k(\tau),$$

wobei $p_k(\tau)$ ein Polynom vom Grad q und $r_k(\tau)$ beschränkt ist. Schliessen Sie, dass $Q_N[f]$ mit der Ordnung $s = q + 1$ gegen $I[f]$ konvergiert.

Aufgabe* 3 (Periodische Spline-Quadratur | 4 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}} B_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} B_m(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \text{für } m \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Sei nun

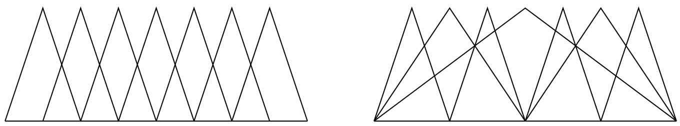
$$s(x) = \sum_{j=-k}^{n+k} c_j B_m(x-j)$$

der n-periodische Spline durch die Stellen (j, y_j), $j = 0, \dots, n-1$ der Ordnung m, wobei $k := \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ist und $n \geq 2k+1$ erfüllt. Insbesondere gelten $c_0 = c_n$ und $c_{-j} = c_{n-j}$ und $c_j = c_{n+j}$ für alle $j = 1, \dots, k$.

Schliessen Sie, dass

$$\int_0^n s(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1} c_j.$$

Aufgabe* 4 (Hierarchische Basis | 4 Punkte).



Basis V_L Basis H_L

Sei $f \in C^2([0,1])$ eine Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Zu $\ell \in \mathbb{N}$ und zugehörigem Index $i \in \{1, 2, \dots, 2^\ell - 1\}$ sei $h_\ell := 2^{-\ell}$, $x_{\ell,i} := ih_\ell \in (0,1)$, $\Delta_\ell := \{x_{\ell,i} : i = 1, \dots, 2^\ell - 1\}$ und

$$\phi_{\ell,i}(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{\ell,i-1}}{h_\ell}, & x \in (x_{\ell,i-1}, x_{\ell,i}], \\ \frac{x_{\ell,i+1} - x}{h_\ell}, & x \in (x_{\ell,i}, x_{\ell,i+1}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $V_L := \{\phi_{L,i} : i = 1, \dots, 2^L - 1\}$ eine Basis von $S_1(\Delta_L)$.

(a) Zeigen Sie:

$$H_L := \{\phi_{\ell,i} : \ell = 1, \dots, L,\ i = 1, \dots, 2^\ell - 1,\ i \textbf{ ungerade}\}$$

ist ebenfalls eine Basis von $S_1(\Delta_L)$.

(b) Rechnen Sie mittels vollständiger Induktion nach, dass jeder Koeffizient $\beta_{\ell,i}$ der Interpolierenden in der Basis H_L

$$s(x) = \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ unger.}}}^{2^\ell - 1} \beta_{\ell,i}\ \phi_{\ell,i}(x) \in S_1(\Delta_L),$$

dargestellt werden kann als

$$\beta_{\ell,i} = f(x_{\ell,i}) - \frac{f(x_{\ell-1,(i-1)/2}) + f(x_{\ell-1,(i+1)/2})}{2}.$$

(c) Rechnen Sie nach, dass für die Koeffizienten $\beta_{\ell,i}$ folgende Abschätzung gilt:

$$|\beta_{\ell+1,2i+1}| \leq \frac{h_\ell^2}{2} \max_{\xi \in [x_{\ell,i}, x_{\ell,i+1}]} |f''(\xi)| \leq \frac{h_\ell^2}{2} \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)|.$$

Programmieraufgabe 5 (Dünngitterquadratur | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.