Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Montag, 22.04.2024, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Lineare Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Gegeben sei auf einem Intervall $[a, b]$ die Funktion $f \in C^1([a, b])$ und eine Zerlegung $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

(a) Es sei $s \in S_1(\Delta)$ der lineare Spline, der an den Stützstellen x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, mit f übereinstimmt. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f'|^2 \, \mathrm{d}x.$$

(b) Gegeben seien nun $f(x) = \cos(\pi x)x$ und die Stützstellen $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-2, -1, 0, 1)$. Bestimmen Sie den linearen Spline s, der an diesen Stützstellen mit f übereinstimmt.

Aufgabe 2 (Partition der Eins | 4 Punkte).

Zeigen Sie, dass die B-Splines eine *Partition der Eins* bilden, das heisst, zeigen Sie, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_m(x - k) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe* 3 (L^2-Norm | 4 Punkte).

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit der $L^2([a, b])$-Norm die Grösse

$$\|f\|_{L^2([a,b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\|f\|_{L^2([a,b])} \geq 0$ und $\|f\|_{L^2([a,b])} = 0$ genau dann, wenn $f \equiv 0$.

(b) $\|\lambda f\|_{L^2([a,b])} = |\lambda| \|f\|_{L^2([a,b])}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\|f + g\|_{L^2([a,b])} \leq \|f\|_{L^2([a,b])} + \|g\|_{L^2([a,b])}$.

Hinweis. *Benutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgrund dieser Eigenschaften definiert $\|f\|_{L^2([a,b])}$ eine Norm auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $C([a, b])$.

Aufgabe* 4 (Diskrete Fourier-Transformation | 4 Punkte).

Sei $n \in \mathbb{N}$, und die diskrete Fourier-Transformation $DF_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ wie in der Vorlesung durch $\boldsymbol{\beta} := DF_n(\mathbf{y}) := \frac{1}{n}\mathbf{T}_n^\star \mathbf{y}$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Für $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$DF_n(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) = DF_n(\mathbf{y}) * DF_n(\mathbf{z}), \quad DF_n(\mathbf{y} * \mathbf{z}) = nDF_n(\mathbf{y}) \cdot DF_n(\mathbf{z}),$$

wobei die beiden Produkte definiert sind durch

$$(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})_k := y_k z_k, \quad (\mathbf{y} * \mathbf{z})_k := \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell z_{(k-\ell) \bmod n}.$$

Hinweis: Für $r \in \mathbb{Z}$ existiert ein $s \in \mathbb{Z}$ mit $r \bmod n = r + sn$.

(b) Für $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\|DF_n(\mathbf{y})\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{y}\|_2.$$

Programmieraufgabe 5 (Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Bitte reichen Sie Ihre Lösung der Programmieraufgabe als komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM ein, wobei Sie dem Dateinamen Ihren Namen hinzufügen. **Zusätzlich heften Sie bitte der Theorieabgabe einen Ausdruck der exportierten `pdf`-Datei an.**