Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Montag, 02.05.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Kubische Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Bestimmen Sie die Koeffizienten des kubischen Splines $s : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$s(t) = \sum_{j=-1}^{3} c_j B_3\left(\frac{t - x_j}{h}\right)$$

durch die Stützpunkte

j	0	1	2
x_j	0	0.5	1
y_j	2	4	10

(a) mit den natürlichen Randbedingungen $s''(0) = s''(1) = 0$.

(b) mit den Hermite-Randbedingungen $s'(0) = 10$, $s'(1) = -2$.

Aufgabe 2 (L^2-Norm | 4 Punkte).

Für eine stetige[1] Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit der $L^2([a, b])$-Norm die Grösse

$$\|f\|_{L^2([a,b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\|f\|_{L^2([a,b])} \geq 0$ und $\|f\|_{L^2([a,b])} = 0$ genau dann, wenn $f \equiv 0$.

(b) $\|\lambda f\|_{L^2([a,b])} = |\lambda| \|f\|_{L^2([a,b])}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\|f + g\|_{L^2([a,b])} \leq \|f\|_{L^2([a,b])} + \|g\|_{L^2([a,b])}$.

Hinweis. *Benutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$\int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgrund dieser Eigenschaften definiert $\|f\|_{L^2([a,b])}$ eine Norm auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $C([a, b])$.

Aufgabe* 3 (Partition der Eins | 4 Punkte).

Zeigen Sie, dass die B-Splines eine *Partition der Eins* bilden, das heisst, zeigen Sie, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_m(x - k) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt.

[1] der Einfachheit halber beschränken wir uns auf stetige Funktionen

Aufgabe* 4 (Quadratische Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Auf dem Intervall $[0,4]$ sei durch

$$s(x) = \sum_{j=-1}^{5} c_j B_2(x-j)$$

ein 4-periodischer (also $c_{-1} = c_3$, $c_0 = c_4$, $c_1 = c_5$), quadratischer Spline gegeben zum Gitter $\Delta = \{1/2, 3/2, 5/2, 7/2\}$. Stellen Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten dieses Splines auf, damit er gegebene Daten y_k, $k \in \{0,1,2,3\}$,

(a) in den Stützstellen $(k + 1/2, y_k)$ interpoliert bzw.

(b) in den Stützstellen (k, y_k) interpoliert.

Zeigen Sie, dass im ersten Fall die resultierende Systemmatrix singulär wird.

Programmieraufgabe 5 (Spline-Interpolation | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.