Übungsblatt 6.

Abgabe bis: **Montag, 15.04.2024, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Newton-Interpolation | 4 Punkte).

Wir betrachten die folgenden Stützstellen

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	-2	1	2

(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zweiten Grades zu den Stützstellen (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2$. Verwenden Sie dafür die Newtonsche Interpolationsformel. Werten Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ mit Hilfe des Horner-Schemas an den Stellen $x = 0.5$, $x = 1$ und $x = 4$ aus.

(b) Sei eine weitere Stützstelle bei $(x_3, y_3) = (2, -1)$ gegeben. Berechnen Sie das Polynom $q(x) \in \Pi_3$ zu den Stützstellen (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, 3$, in der Newtonschen Darstellung. Nutzen Sie dabei Ihre Lösung aus Teil (a). Werten Sie $q(x)$ mit Hilfe des Horner-Schemas an den Stellen $x = 0.5$, $x = 1$ und $x = 4$ aus.

Aufgabe 2 (Iterative Berechnung der dividierten Differenzen | 4 Punkte).

Seien $n + 1$ paarweise verschiedenen Knoten $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei weiter $\xi \in \mathbb{R}$ ein weiterer, von den x_i verschiedener, Knoten. Zeigen Sie, dass man mit Aufwand $\mathcal{O}(n)$ aus den dividierten Differenzen $f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_n]$ die dividierten Differenzen $f[\xi], f[\xi, x_0], \dots, f[\xi, x_0, \dots, x_n]$ berechnen kann.

Aufgabe* **3** (Basler Problem | 4 Punkte).

Zu einer stetigen, periodischen Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definieren wir für $m \in \mathbb{Z}$ die Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(m) := \langle g_m, f \rangle_{L^2([0,2\pi])} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(t) := t(2\pi - t)$.

(b) Schliessen Sie aus der Darstellung

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m) g_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m) \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt},$$

dass die Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt.

Aufgabe* 4 (Trigonometrische Interpolation | 4 Punkte).

Gegeben seien die Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	-1	3	1	2	-1

(a) Berechnen Sie das trigonometrische Polynom $p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \beta_2 e^{2ix} + \beta_3 e^{3ix}$, welches die oben angegebenen Stützstellen interpoliert.

(b) Bestimmen Sie das äquivalente trigonometrische Polynom

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \frac{a_2}{2} \cos(2x).$$

Programmieraufgabe 5 (Newton-Interpolation | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Bitte reichen Sie Ihre Lösung der Programmieraufgabe als komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM ein, wobei Sie dem Dateinamen Ihren Namen hinzufügen. **Zusätzlich heften Sie bitte der Theorieabgabe einen Ausdruck der exportierten `pdf`-Datei an.**