



Übungsblatt 6.

Abgabe bis: Montag, 25.04.2022, 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (Newton-Interpolation | 4 Punkte).

Bestimmen Sie mithilfe der Newtonschen Interpolationsformel das Polynom p dritten Grades, welches den Bedingungen $p(0) = 1$, $p(1) = 7$, $p(-1) = 1$ und $p(2) = 25$ genügt. Werten Sie das Polynom mithilfe des Horner-Schemas an den Punkten $x = -2$ und $x = 3$ aus.

Aufgabe 2 (Iterative Berechnung der dividierten Differenzen | 4 Punkte).

Seien $n + 1$ paarweise verschiedenen Knoten $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei weiter $\xi \in \mathbb{R}$ ein weiterer, von den x_i verschiedener, Knoten. Zeigen Sie, dass man mit Aufwand $\mathcal{O}(n)$ aus den dividierten Differenzen $f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_n]$ die dividierten Differenzen $f[\xi], f[\xi, x_0], \dots, f[\xi, x_0, \dots, x_n]$ berechnen kann.

Aufgabe* 3 (Trigonometrische Interpolation | 4 Punkte).

Gegeben seien die Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	1	3	2	-1	1

- (a) Berechnen Sie das trigonometrische Polynom

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \beta_2 e^{2ix} + \beta_3 e^{3ix},$$

welches die oben angegebenen Stützstellen interpoliert.

- (b) Bestimmen Sie das äquivalente trigonometrische Polynom

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \frac{a_2}{2} \cos(2x).$$

Aufgabe* 4 (Basler Problem | 4 Punkte).

Zu einer stetigen, periodischen Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir für $m \in \mathbb{Z}$ den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(m) := \langle g_m, f \rangle_{L^2([0, 2\pi])} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-imt} f(t) dt.$$

- (a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(t) := t(2\pi - t)$.

- (b) Schliessen Sie aus der Darstellung

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) g_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{imt},$$

dass die Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt.

Programmieraufgabe 5 (Newton-Interpolation | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten pdf-Datei ein.