Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Montag, 11.04.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Lagrange-Interpolation | 4 Punkte).

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{12}{3+2x}.$$

(a) Bestimmen Sie das Lagrange-Interpolationspolynom p bezüglich der Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0.5$ und $x_3 = 1$.

(b) Skizzieren Sie von Hand die Funktion f sowie das Interpolationspolynom p.

Aufgabe 2 (Interpolationsfehler | 4 Punkte). Sei $f \in C^3(\mathbb{R})$ und p das quadratische Interpolationspolynom durch die äquidistanten Stützstellen $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ und $x_2 = h$ für ein $h > 0$. Zeigen Sie für den maximalen Interpolationsfehler die Abschätzung

$$\max_{t\in[-h,h]} |f(t) - p(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} \|f^{(3)}\|_{C([-h,h])} h^3.$$

Aufgabe* 3 (Polynombasis | 4 Punkte).

Es seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \in \mathbb{R}$ Stützstellen. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Polynome $L_0, \ldots, L_n$ eine Basis des Polynomraums

$$\Pi_n := \{p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ p \text{ ist ein Polynom von Grad} \leq n\}$$

bilden.

Aufgabe* 4 (Orthonormalsysteme | 4 Punkte).

Zu $m \in \mathbb{Z}$ sei die Funktion

$$g_m(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{imt}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktionen ein Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$, dem Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen über $[0, 2\pi]$ bilden. Dies bedeutet, dass

$$\langle g_m, g_n \rangle_{L^2([0,2\pi])} := \int_0^{2\pi} \overline{g_m(t)}\, g_n(t) \,\mathrm{d}t = \delta_{m,n}$$

für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt.

(b) Schliessen Sie, dass auch die Funktionen

$$f_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mt), & m > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & m = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(-mt), & m < 0, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

ein Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$ bilden.

Programmieraufgabe 5 (Lagrange-Interpolation | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.