Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Montag, 08.04.2024, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Zusammenhang zwischen LR- und Cholesky-Zerlegung | 4 Punkte).

(a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, reguläre Matrix mit der LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$. Zeigen Sie, dass eine Diagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit Diagonaleinträgen $d_i \neq 0$, so dass $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\top$.

Hinweis. Beachten Sie, dass $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ gilt, und benutzen Sie, dass die LR-Zerlegung einer regulären Matrix, wenn sie durchführbar ist, eindeutig ist.

(b) Sei nun $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass Sie dann Teilaufgabe a) anwenden können, um $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\top$ zu erhalten, wobei $d_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Schliessen Sie somit, dass es eine Diagonalmatrix $\widehat{\mathbf{D}}$ gibt, so dass $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widehat{\mathbf{D}}\big(\mathbf{L}\widehat{\mathbf{D}}\big)^\top$ die Cholesky-Zerlegung von $\mathbf{A}$ ist.

Aufgabe 2 (Lagrange-Interpolation | 4 Punkte).

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{3}{3+2x}.$$

(a) Bestimmen Sie das Lagrange-Interpolationspolynom p bezüglich der Stützstellen $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [-1, -0.5, 0.5, 1]$.

(b) Zeigen Sie die Fehlerabschätzung

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq 12.$$

Aufgabe 3 (Eigenschaften der Lagrange-Polynome | 4 Punkte).

Gegeben seien $n+1$ beliebige Knoten $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, und es seien $L_0, L_1, \dots, L_n$ die zugehörigen Lagrange-Polynome und $w(x)$ das Knotenpolynom. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

(a) $L_i(x) = \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)}$,

(b) $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$.

Aufgabe* **4** (LR-Zerlegung mit totaler Pivotisierung | 4 Punkte).

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit totaler Pivotisierung, $\mathbf{PA\Pi} = \mathbf{LR}$, für die Matrix $\mathbf{A}$ von Hand. Geben Sie die Matrizen $\mathbf{P}$, $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ an.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mithilfe der LR-Zerlegung aus (a).

Aufgabe* 5 (Sherman-Morrison-Woodbury-Formel | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ sowie $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ und $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Um das geänderte lineare Gleichungssystem $(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^\top)\mathbf{z} = \mathbf{b}$ zu lösen, wollen wir die LR-Zerlegung von $\mathbf{A}$ wiederverwenden.

(a) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{v}^\top\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq -1$ gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^\top)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{1 + \mathbf{v}^\top\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{uv}^\top\mathbf{A}^{-1}.$$

(b) Ist $\mathbf{v}^\top\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = -1$, so ist $(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^\top)$ singulär.

(c) Formulieren Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung von $\mathbf{z}$, wobei die Zerlegung von $\mathbf{A}$ in $\mathbf{LR}$ zu benutzen ist. Dabei seien $\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{x}, \mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ bekannt.

Aufgabe* 6 (Orthonormalsysteme | 4 Punkte).

Zu $m \in \mathbb{Z}$ sei die Funktion

$$g_m(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{imt}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktionen ein Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$, dem Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen über $[0, 2\pi]$ bilden. Dies bedeutet, dass

$$\langle g_m, g_n\rangle_{L^2([0,2\pi])} := \int_0^{2\pi} \overline{g_m(t)}\, g_n(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{m,n}$$

für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt.

(b) Schliessen Sie, dass auch die Funktionen

$$f_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mt), & m > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & m = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(-mt), & m < 0, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

ein Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$ bilden.

Programmieraufgabe 7 (Lagrange-Interpolation | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.