Übungsblatt 4.

Abgabe bis: **Montag, 04.04.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Cholesky-Zerlegung | 4 Punkte).

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\intercal$ für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -10 & 6 & 14 \\ -10 & 26 & -16 & -32 \\ 6 & -16 & 46 & 42 \\ 14 & -32 & 42 & 75 \end{bmatrix}$$

von Hand.

Aufgabe 2 (LR-Zerlegung von Bandmatrizen | 4 Punkte).

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Bandmatrix mit oberer Bandbreite $p \ll n$ und unterer Bandbreite $q \ll n$, das heisst, es gelte

$$a_{i,j} = 0, \quad \text{falls } j > i + p \text{ oder } i > j + q.$$

Weiter nehmen wir an, dass $\mathbf{A}$ strikt diagonaldominant sei, womit die LR-Zerlegung ohne Pivotsuche durchführbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ in $\mathcal{O}(npq)$ Operationen durchführbar ist, wobei sich unter der Diagonale in jeder Spalte von $\mathbf{L}$ höchstens q von 0 verschiedene Einträge befinden und rechts der Diagonale in jeder Zeile von $\mathbf{R}$ höchstens p von 0 verschiedene Einträge.

(b) Schliessen Sie, dass der Aufwand für die Vorwärtssubstitution $\mathcal{O}(nq)$ Rechenoperationen beträgt und für die Rückwärtssubstitution $\mathcal{O}(np)$ Rechenoperationen.

Aufgabe* **3** (LR-Zerlegung mit totaler Pivotisierung | 4 Punkte).

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit totaler Pivotisierung $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{\Pi} = \mathbf{L}\mathbf{R}$ für die Matrix $\mathbf{A}$ von Hand. Geben Sie dabei die Matrizen $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{\Pi}$ an.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mithilfe der Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

Aufgabe* **4** (Normen auf positiv definiten Matrizen | 4 Punkte).

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix.

(a) Zeige Sie, dass durch

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} := \sqrt{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A} \mathbf{x}}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

(b) Zeichnen Sie die Einheitsscheibe für $\|\cdot\|_A$, d.h. die Menge

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_{\mathrm{A}} \leq 1\},$$

für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Programmieraufgabe 5 (Pivotisierte Cholesky-Zerlegung | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.