



## Übungsblatt 4.

Abgabe bis: Montag, 25.03.2024, 14:15 Uhr

### Aufgabe 1 (Cholesky-Zerlegung | 4 Punkte).

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung  $A = LL^T$  für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & -5 & 14 & -14 \\ -1 & 5 & -14 & 30 \end{bmatrix}$$

von Hand.

### Aufgabe 2 (LR-Zerlegung von Bandmatrizen | 4 Punkte).

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Bandmatrix mit oberer Bandbreite  $p \ll n$  und unterer Bandbreite  $q \ll n$ , das heisst, es gelte

$$a_{i,j} = 0, \quad \text{falls } j > i + p \text{ oder } i > j + q.$$

Weiter nehmen wir an, dass die LR-Zerlegung ohne Pivotsuche durchführbar ist.

- Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung der Matrix  $A$  in  $\mathcal{O}(npq)$  Operationen durchführbar ist, wobei sich unter der Diagonale in jeder Spalte von  $L$  höchstens  $q$  von 0 verschiedene Einträge befinden und rechts der Diagonale in jeder Zeile von  $R$  höchstens  $p$  von 0 verschiedene Einträge.
- Schliessen Sie, dass der Aufwand für die Vorwärtssubstitution  $\mathcal{O}(nq)$  Rechenoperationen beträgt und für die Rückwärtssubstitution  $\mathcal{O}(np)$  Rechenoperationen.

### Aufgabe\* 3 (Kondition und Fehlerverstärkung | 4 Punkte).

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{bmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Konditionszahlen  $\text{cond}_\infty A$  und  $\text{cond}_\infty B$ .
- Lösen Sie die Gleichungssysteme

$$Ax = b, \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad A(x + \widehat{\Delta}x) = b + \widehat{\Delta}b$$

für die Vektoren

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta b = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Delta}b = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \end{bmatrix},$$

mit einer kleinen Zahl  $\delta > 0$ . Vergleichen Sie die jeweiligen Fehler mit den allgemeinen Fehlerabschätzungen

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \quad \text{und} \quad \frac{\|\widehat{\Delta}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(A) \frac{\|\widehat{\Delta}b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

**Aufgabe\* 4** (Normen auf positiv definiten Matrizen | 4 Punkte).

Es sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische und positiv definite Matrix.

(a) Zeige Sie, dass durch

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} := \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}$$

eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  definiert wird.

(b) Zeichnen Sie die Einheits Scheibe für  $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$ , d.h. die Menge

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} \leq 1\},$$

für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

**Programmieraufgabe 5** (Pivotisierte Cholesky-Zerlegung | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten pdf-Datei ein.