Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Montag, 28.03.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Gauss-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung | 4 Punkte). Lösen Sie mit dem Gauss-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & -3 & -6 \\ 12 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Geben Sie $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ und die ggf. benötigte Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ an.

Aufgabe 2 (Matrixmultiplikation | 4 Punkte).

Seien $n \in \mathbb{N}$ eine Zweierpotenz, also $n = 2^m$ mit $m \in \mathbb{N}$, und $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Bestimmen Sie, wie viele elementare Additionen und Multiplikationen reeller Zahlen zur Berechnung des Produkts $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$ mit der gewöhnlichen Summenformel notwendig sind. Drücken Sie die benötigte Anzahl elementarer Additionen und Multiplikationen für die Matrixmultiplikation mit der $\mathcal{O}(\cdot)$-Notation aus.

(b) Strassen[1] schlug folgendes Verfahren vor: Zerlege $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in jeweils vier $(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2})$-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Berechne damit die sieben Hilfsprodukte

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &:= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{22}), & \mathbf{P}_5 &:= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_{22}, \\ \mathbf{P}_2 &:= (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22})\mathbf{B}_{11}, & \mathbf{P}_6 &:= (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{11})(\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{12}), \\ \mathbf{P}_3 &:= \mathbf{A}_{11}(\mathbf{B}_{12} - \mathbf{B}_{22}), & \mathbf{P}_7 &:= (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{21} + \mathbf{B}_{22}). \\ \mathbf{P}_4 &:= \mathbf{A}_{22}(\mathbf{B}_{21} - \mathbf{B}_{11}), \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5 + \mathbf{P}_7 & \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_6 \end{bmatrix}.$$

Damit reduziert sich die Zahl der Multiplikationen kleinerer Matrizen von acht auf sieben gegenüber dem naiven Verfahren, während die Zahl der Additionen gestiegen ist. Dieses Verfahren wird nun rekursiv zur Berechnung der sieben kleineren Produkte angewandt. Zeigen Sie, dass die Anzahl elementarer Additionen und Multiplikationen $T(n)$ für die Multiplikation zweier $(n \times n)$-Matrizen der Rekurrenzrelation

$$T(n) = 7\,T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2, \qquad T(1) = 1$$

genügt. Folgern Sie daraus, dass die Matrixmultiplikation nach Strassen die Komplexität $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) \approx \mathcal{O}(n^{2.807})$ besitzt.

[1] V. Strassen, *Gaussian elimination is not optimal*, Numerische Mathematik, 13:354–356 (1969).

Aufgabe* 3 (Pivotisierung | 4 Punkte).

Es sei $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es bezeichne $\mathbf{A}^{(k)} = [a_{i,j}^{(k)}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für $k = 0, \dots, n-1$, die nach dem k-ten Teilschritt einer LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche entstandene Matrix. Wir definieren nun die Grössen

$$\alpha_k := \max_{i,j} |a_{i,j}^{(k)}|, \qquad \alpha := \max_{0\le k\le n-1} \alpha_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\alpha_k \le 2^k \alpha_0$ und schliessen Sie, dass $\alpha \le 2^{n-1}\alpha_0$.

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichheit in (a) gilt.

(c) Man kann zeigen[2], dass bei einer LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche mit Gleitkommaarithmetik die Abschätzung

$$\left\| \mathbf{A}^{(n-1)} - \boxed{\mathbf{A}}^{(n-1)} \right\|_1 \le n(n-1)\frac{\texttt{eps}}{1-\texttt{eps}}\alpha$$

gilt, wobei $\mathbf{A}^{(n-1)}$ die mit exakter Arithmetik und $\boxed{\mathbf{A}}^{(n-1)}$ die mit Gleitkommaarithmetik berechnete Matrix ist. Schliessen Sie aus dem schlimmstmöglichen Fall, dass die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche nicht vorwärtsstabil ist.

Hinweis. *Dieser Fall tritt allerdings in der Praxis nur sehr selten auf.*

Aufgabe* 4 (Kondition und Fehlerverstärkung | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A}$ eine reguläre $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$, falls sie existiert, eindeutig ist.

Hinweis. *Nehmen Sie an, dass zwei LR-Zerlegungen* $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{R}_2$ *existieren. Zeigen Sie dann* $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ *und* $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$. *Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das Produkt zwei rechter, oberer Dreiecksmatrizen wieder eine rechte, obere Dreiecksmatrix ist.*

Programmieraufgabe 5 (LR-Zerlegung | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.

[2] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag.