Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Montag, 18.03.2024, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Gauss-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung | 4 Punkte).

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mittels dem Gauss-Verfahren mit Spaltenpivotisierung

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$ und die ggf. benötigte Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ an.

Aufgabe 2 (Matrixmultiplikation | 4 Punkte).

Seien $n \in \mathbb{N}$ eine Zweierpotenz, also $n = 2^m$ mit $m \in \mathbb{N}$, und seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Bestimmen Sie, wie viele elementare Additionen und Multiplikationen reeller Zahlen zur Berechnung des Produkts $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$ mit der gewöhnlichen Summenformel notwendig sind. Drücken Sie die benötigte Anzahl elementarer Additionen und Multiplikationen für die Matrixmultiplikation mit der $\mathcal{O}(\cdot)$-Notation aus.

(b) Strassen[1] schlug folgendes Verfahren vor: Zerlege $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in jeweils vier $(\frac{n}{2}\times\frac{n}{2})$-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Berechne damit die sieben Hilfsprodukte

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &:= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{22}), & \mathbf{P}_5 &:= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_{22},\\
\mathbf{P}_2 &:= (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22})\mathbf{B}_{11}, & \mathbf{P}_6 &:= (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{11})(\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{12}),\\
\mathbf{P}_3 &:= \mathbf{A}_{11}(\mathbf{B}_{12} - \mathbf{B}_{22}), & \mathbf{P}_7 &:= (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{21} + \mathbf{B}_{22}).\\
\mathbf{P}_4 &:= \mathbf{A}_{22}(\mathbf{B}_{21} - \mathbf{B}_{11}), & &
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5 + \mathbf{P}_7 & \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_6 \end{bmatrix}.$$

Dieses Verfahren wird nun rekursiv zur Berechnung der sieben anstatt der acht kleineren Produkte angewandt. Zeigen Sie, dass die Anzahl elementarer Additionen und Multiplikationen $T(n)$ für die Multiplikation zweier $(n \times n)$-Matrizen der Rekurrenzrelation

$$T(n) = 7\,T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2, \qquad T(1) = 1$$

genügt.

(c) Folgern Sie daraus, dass die Matrixmultiplikation nach Strassen die Komplexität $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) \approx \mathcal{O}(n^{2.807})$ besitzt.

[1] V. Strassen, *Gaussian elimination is not optimal,* Numerische Mathematik, 13:354–356 (1969).

Aufgabe* **3** (Eindeutigkeit der LR-Zerlegung | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A}$ eine reguläre $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$, falls sie existiert, eindeutig ist.

Hinweis. *Nehmen Sie an, dass zwei LR-Zerlegungen* $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{R}_2$ *existieren. Zeigen Sie dann* $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ *und* $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$. *Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das Produkt zwei rechter, oberer Dreiecksmatrizen wieder eine rechte, obere Dreiecksmatrix ist.*

Aufgabe* **4** (Diagonaldominante Matrizen | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ eine strikt diagonaldominante $n \times n$-Matrix, d.h. es gelte

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung durchführbar ist, wobei die bei jedem Teilschritt entstehende Matrix $\mathbf{A}_i$ wieder strikt diagonaldominant ist.

Programmieraufgabe 5 (LR-Zerlegung | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.