Übungsblatt 2.

Abgabe bis: **Montag, 21.03.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (LR-Zerlegung | 4 Punkte).

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

mithilfe der LR-Zerlegung von $\mathbf{A}$.

Aufgabe 2 (Vermeidung von Auslöschung | 4 Punkte).

Wir haben gelernt, dass mit „Auslöschung" eine inakzeptable Vergrösserung des relativen Eingabefehlers bezeichnet wird. Ferner haben wir gelernt, dass die Hauptquelle für Auslöschung die Subtraktion von nahezu gleich grossen Zahlen ist.
Schreiben Sie folgende Ausdrücke so um, dass für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird.

(a) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$,

(b) $\dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ für $x \gg 1$,

(c) $x^3 \left(\dfrac{x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x} \right)$ für $x \gg 1$,

(d) $\sqrt[3]{1 + x} - 1$ für $x \approx 0$.

Aufgabe* **3** (diagonaldominante Matrizen | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ eine strikt diagonaldominante $n \times n$-Matrix, d.h. es gelte

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung durchführbar ist, wobei die bei jedem Teilschritt entstehende Matrix $\mathbf{A}_i$ wieder strikt diagonaldominant ist.

Aufgabe* **4** (Kondition und Fehlerverstärkung | 4 Punkte).

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionszahlen $\operatorname{cond}_\infty \mathbf{A}$ und $\operatorname{cond}_\infty \mathbf{B}$.

(b) Lösen Sie die Gleichungssysteme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x} + \widehat{\Delta}\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \widehat{\Delta}\mathbf{b}$$

für die Vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}, \qquad \widehat{\Delta}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \end{bmatrix},$$

mit einer kleinen Zahl $\delta > 0$. Vergleichen Sie die jeweiligen Fehler mit den allgemeinen Fehlerabschätzungen

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \le \operatorname{cond}_\infty(\mathbf{A})\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \qquad \text{und} \qquad \frac{\|\widehat{\Delta}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \le \operatorname{cond}_\infty(\mathbf{A})\frac{\|\widehat{\Delta}\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}.$$

Programmieraufgabe 5 (LR-Zerlegung | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.