



Übungsblatt 2.

Abgabe bis: Montag, 11.03.2024, 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (LR-Zerlegung | 4 Punkte).

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $b = [-2, 2, -1, -3]^T$, mit Hilfe Ihrer LR-Zerlegung von A .
- (b) Berechnen Sie $\det(A)$ mit Hilfe Ihrer LR-Zerlegung von A .

Aufgabe 2 (Rundung | 4 Punkte).

Berechnen Sie

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

für $x_1 = 20$, $x_2 = 50$ und $x_3 = 100$ in dreistelliger dezimaler Gleitkommarithmetik, d.h., nach jeder Grundrechenoperation wird das Ergebnis auf 3 Stellen gerundet. Geben Sie auch jeweils den relativen Fehler an.

Aufgabe* 3 (Finite Differenzen | 4 Punkte).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Um für $x_0 \in (a, b)$ eine numerische Approximation an die Ableitung $f'(x_0)$ zu erhalten, berechnen wir für hinreichend kleines $h > 0$ die Vorwärtsdifferenz bzw. die zentrale Differenz durch

$$(\delta_h^+ f)(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{bzw.} \quad (\delta_h^0 f)(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass für die Vorwärtsdifferenz gilt

$$|f'(x_0) - (\delta_h^+ f)(x_0)| \leq Ch \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{2} \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

Dies bedeutet, dass die Vorwärtsdifferenz die Ableitung von f linear in h approximiert. Weisen Sie weiter nach, dass die zentrale Differenz sogar quadratisch in h approximiert, d.h. es gilt

$$|f'(x_0) - (\delta_h^0 f)(x_0)| \leq Ch^2 \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{6} \max_{t \in [a, b]} |f'''(t)|.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung von f im Punkt x_0 .

- (b) Gegeben sei auf dem Intervall $[0, 2]$ die Funktion $f(x) = 6x^4 - 2x$ und $x_0 = 1$. Wie gross darf h gewählt werden, damit der Fehler in der Vorwärtsdifferenz kleiner als 10^{-6} wird? Wie gross darf h gewählt werden im Fall der zentralen Differenz?

Aufgabe* 4 (Frobenius-Norm | 4 Punkte).

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{Spur}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$;

(b) $\|\mathbf{AB}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{B}\|_F$.

Programmieraufgabe 5 (Maschinengenauigkeit & Differenzenquotienten | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript und als eine pdf-Datei ein.