Bonusblatt 11.

Abgabe bis: **Montag, 30.05.2022,** 13:30 Uhr im Briefkasten

Die Aufgaben auf diesem Blatt geben Bonuspunkte für die Übungen.

Aufgabe 1 (Fixpunktiteration | 4 Bonuspunkte).

Betrachten Sie die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ mit

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^4}, \quad x > 0. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Wie gross ist die Kontraktionskonstante L?

Hinweis. *Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

(b) Geben Sie für den Startwert $x_0 = 2.5$ mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes eine Fehlerschranke für $|x_{10} - \hat{x}|$, wobei $\hat{x}$ den Fixpunkt von (1) bezeichnet. Auf wie viele Stellen hinter dem Komma ist x_{10} korrekt?

Aufgabe 2 (Verfahren von Heron | 4 Bonuspunkte).

Zur Berechnung der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ einer positiven Zahl $a > 0$ benutzten wohl schon die Babylonier, spätestens aber der Alexandriner Heron (etwa 1. Jh. n. Chr.), das folgende Verfahren: Für beliebigen reellen Startwert $x_0 > 0$ iteriere

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Es sei $a = 2$ gewählt. Zeigen Sie, dass das *Heron-Verfahren* quadratisch gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Überprüfen Sie dazu, dass

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq C\left|x_n - \sqrt{2}\right|^2$$

für eine Konstante $C > 0$ gilt.

(b) Führen Sie vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{2}$ aus. Wählen Sie dazu den Startwert $x_0 = 2$ und stellen Sie erst x_4 als Dezimalzahl dar. Geben Sie zu jeder Iterierten auch den Fehler an.

Aufgabe* 3 (Tychonoff-Regularisierung | 4 Bonuspunkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ist die Matrix $\mathbf{A}$ schlecht konditioniert, so kann man ersatzweise das regularisierte Problem

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha\|\mathbf{x}\|_2^2 \longrightarrow \min \tag{2}$$

für ein festes $\alpha > 0$ lösen. In diesem Fall spricht man von *Tychonoff-Regularisierung*. Zeigen Sie, dass die Lösung $\mathbf{x}^\star$ von (2) gegeben ist durch

$$\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{x}^\star + \alpha\mathbf{x}^\star = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{b}.$$

Hinweis. *Zeigen Sie zuerst, dass* (2) *dem linearen Ausgleichsproblem*

$$\left\|\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \sqrt{\alpha}\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{x} - \begin{bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\right\|_2 \longrightarrow \min$$

entspricht.

Aufgabe⋆ 4 (Gram-Schmidt-Verfahren | 4 Bonuspunkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Die Vektoren $\mathbf{q}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, definiert durch

$$\tilde{\mathbf{q}}_j = \mathbf{a}_j - \sum_{k=1}^{j-1} (\mathbf{a}_j^\top \mathbf{q}_k)\mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_j}{\|\tilde{\mathbf{q}}_j\|_2},$$

bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Für $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$r_{k,j} = \begin{cases} \mathbf{a}_j^\top \mathbf{q}_k, & k < j, \\ \|\tilde{\mathbf{q}}_j\|, & k = j, \\ 0, & k > j, \end{cases}$$

folgt $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$.

(b) Berechnen Sie $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Programmieraufgabe 5 (Tschebyscheff-Interpolation | 4 Bonuspunkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.