Übungsblatt 10.

Abgabe bis: **Montag, 23.05.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Lineares Ausgleichsproblem | 4 Punkte).

Zu $h > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ seien die Messwerte

j	0	1	2	…	n
x_j	0	1	2	…	n
y_j	y_0	y_1	y_2	…	y_n

gegeben. Die Gerade $g(x) = ax + b$, welche die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{j=0}^{n} \left| y_j - g(x_j) \right|^2$$

minimiert, wird *Ausgleichsgerade* genannt. Rechnen Sie nach, dass die Steigung a der Ausgleichsgeraden

$$a = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \sum_{j=0}^{n} (2j - n) y_j$$

beträgt.

Hinweis. *Sie dürfen die folgende Identität benutzen:*

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 2 (Fixpunktiteration | 4 Punkte).

Gesucht sei eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 + x^2, \\ x + 2y &= 1 + y^2. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass das jeder Fixpunkt der Abbildung

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{y} \\ 1 + \sqrt{x} \end{bmatrix}$$

auch eine Lösung des Gleichungssystems ist.

(b) Betrachten Sie den Startwert $(x_0, y_0)^\intercal = (3, 2)^\intercal$. Nähern Sie eine Lösung des Gleichungssystems mit der Fixpunktiteration[1]

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} := \Phi\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}\right)$$

auf zwei Nachkommastellen genau an.

[1] Sie dürfen annehmen, dass Φ eine kontrahierende Selbstabbildung auf $[2, 4]^2$ ist.

Aufgabe* 3 (Orthogonalpolynome und Tridiagonalmatrizen | 4 Punkte).

Es sei $(u_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Orthogonalpolynome, definiert durch die Dreitermrekursion

$$a_{n+1}u_{n+1}(x) = (x - b_n)u_n(x) - a_n u_{n-1}(x)$$

mit den Definitionen $u_{-1} = 0$, $u_0 = 1$ und $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Nullstellen von u_n genau den Eigenwerten der Tridiagonalmatrix

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & & & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

entsprechen.

Hinweis. *Zeigen Sie zuerst mittels vollständiger Induktion über n, dass das charakteristische Polynom p_n der Matrix $\mathbf{T}_n$ durch $p_n(\lambda) = a_1 a_2 \ldots a_n u_n(\lambda)$ gegeben ist.*

Aufgabe* 4 (Sattelpunktformulierung | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit Rang $n \leq m$ und es gelte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ den Normalengleichungen

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top\mathbf{b}$$

genügt. Welchem Ausdruck entspricht der Vektor $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$?

Programmieraufgabe 5 (Lineares Ausgleichsproblem | 4 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.