



Übungsblatt 1.

Abgabe bis: Montag, 04.03.2024, 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (Landau-Symbole | 4 Punkte).

Seien f und g Funktionen. Man sagt, dass f für $x \rightarrow a$ gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar ist, $f = o(g)$, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ausserdem heisst f für $x \rightarrow a$ asymptotisch durch g beschränkt, $f = \mathcal{O}(g)$, falls

$$\limsup_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) $f(x)$ konvergiert genau dann gegen Null für $x \rightarrow a$, wenn $f(x) = o(1)$ für $x \rightarrow a$ gilt;
- (b) $\ln(x) = o(x^\alpha)$ für $x \rightarrow \infty$ und alle $\alpha > 0$;
- (c) $x^\pi - x^e = \mathcal{O}(x^3)$ für $x \rightarrow 0$;
- (d) $\frac{e^x + x}{e^x + x^2} = \mathcal{O}(1)$ für $x \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2 (Fehlerfortpflanzung | 4 Punkte).

Wir wollen nun die Fortpflanzung von Fehlern bei der Durchführung der vier arithmetischen Grundoperationen $\{+, -, \cdot, /\}$ betrachten. Die Zahlen x und y seien mit Rundungsfehlern Δx und Δy aus vorherigen Rechnungen behaftet, wobei $|\frac{\Delta x}{x}|, |\frac{\Delta y}{y}| \ll 1$ gelte. Zeigen Sie, dass bei exakter Rechnung (also ohne Rundungsfehler) für die relativen Fehler der Ergebnisse die folgenden Aussagen gelten:

$$(a) \frac{((x + \Delta x) + (y + \Delta y)) - (x + y)}{x + y} = \frac{x}{x + y} \frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{x + y} \frac{\Delta y}{y} \quad (\text{Addition})$$

$$(b) \frac{((x + \Delta x) - (y + \Delta y)) - (x - y)}{x - y} = \frac{x}{x - y} \frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{x - y} \frac{\Delta y}{y} \quad (\text{Subtraktion})$$

$$(c) \frac{((x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y)) - (x \cdot y)}{x \cdot y} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \quad (\text{Multiplikation})$$

$$(d) \frac{((x + \Delta x)/(y + \Delta y)) - (x/y)}{x/y} \approx \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} \quad (\text{Division})$$

Falls der relative Fehler des Ergebnisses sehr viel grösser ist, als der relative Fehler der Eingabedaten, so spricht man von Auslöschung. In welchen der obigen Fällen kann Auslöschung auftreten?

Hinweis. Produkte von Rundungsfehlern, d.h. $\Delta x \cdot \Delta x$, $\Delta x \cdot \Delta y$ und $\Delta y \cdot \Delta y$, können Sie vernachlässigen.

Aufgabe* 3 (Matrixnormen | 4 Punkte).

- (a) Seien V, W Vektorräume und $\Phi : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus. Weiter sei $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf V . Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$\|\cdot\|_W : w \mapsto \|\Phi^{-1}(w)\|_V$$

eine Norm auf W definiert wird.

- (b) Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent sind.

Hinweis. Benutzen Sie dazu Teil (a) und die Äquivalenz aller Normen auf \mathbb{R}^{n^2} .

Aufgabe* 4 (induzierte Normen | 4 Punkte).

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Dann ist

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

die sogenannte *induzierte Norm* von $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Überprüfen Sie, dass $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für jedes $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\|\mathbf{A}\|$ die kleinste aller Zahlen $C > 0$ ist, so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq C\|\mathbf{x}\|$ gilt.

Informationen zu den Übungen

Die Übung zu der Vorlesung Einführung in die Numerik / Numerik für die Studierende der Naturwissenschaften besteht aus den Theorie- und Programmieraufgaben. Die erste Programmieraufgabe wird auf dem zweiten Blatt stehen. Die Übungsaufgaben werden im Wochenrhythmus ausgegeben und der Abgabe und Korrektur folgend in den Übungsstunden besprochen. Die Abgabe Ihrer Bearbeitung erfolgt sowohl physisch als auch elektronisch. Reichen Sie bitte pro Abgabe folgende Dokumente ein:

- Ihre Lösungen zu den Theorieaufgaben, sowie einen ausgedruckten pdf-Export ihrer Programmieraufgaben im Briefkasten Ihres Assistenten oder zu Beginn der Vorlesung,
- Ihre Programmieraufgaben als komplettes MATLAB-Livescript elektronisch über das Abgabesystem von ADAM. Abgaben per E-Mail können leider nicht akzeptiert werden!

Bitte heften Sie Ihre Blätter zusammen und schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen, sowie den Vor- und Nachnamen Ihres Assistenten auf Ihre Abgabe!