Übungsblatt 1.

Abgabe bis: **Montag, 14.03.2022, 14:15 Uhr**

Aufgabe 1 (Landau-Symbole | 4 Punkte).

Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Man sagt, dass f für $x \longrightarrow a$ gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar ist, $f = o(g)$, falls

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ausserdem heisst f für $x \longrightarrow a$ asymptotisch durch g beschränkt, $f = \mathcal{O}(g)$, falls

$$\limsup_{x \longrightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\pi x^\pi + 4x^2 + 2022 = \mathcal{O}(x^3)$ für $x \longrightarrow \infty$.

(b) $\sin(x) = \mathcal{O}(x)$ für $x \longrightarrow 0$.

(c) $f(x) = \mathcal{O}(1)$ für $x \longrightarrow \infty$ gilt genau dann, wenn $f(x)$ beschränkt ist.

(d) $f(x)$ konvergiert genau dann gegen Null für $x \longrightarrow a$, wenn $f(x) = o(1)$ für $x \longrightarrow a$ gilt.

(e) Für $x \longrightarrow \infty$ existiert eine Funktion $f(x)$ mit $f(x) = o(\sqrt{x})$ und $f(x) \neq \mathcal{O}(\sqrt{x^3})$.

Aufgabe 2 (Fehlerfortpflanzung | 4 Punkte).

Wir wollen nun die Fortpflanzung von Fehlern bei der Durchführung der vier arithmetischen Grundoperationen $\{+, -, \cdot, /\}$ betrachten. Die Zahlen x und y seien mit Rundungsfehlern Δx und Δy aus vorherigen Rechnungen behaftet, wobei $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \ll 1$ gelte. Zeigen Sie, dass bei exakter Rechung (also ohne Rundungsfehler) für die relativen Fehler der Ergebnisse die folgenden Aussagen gelten:

(a) $$\frac{((x + \Delta x) + (y + \Delta y)) - (x + y)}{x + y} = \frac{x}{x + y} \frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{x + y} \frac{\Delta y}{y} \qquad \text{(Addition)}$$

(b) $$\frac{((x + \Delta x) - (y + \Delta y)) - (x - y)}{x - y} = \frac{x}{x - y} \frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{x - y} \frac{\Delta y}{y} \qquad \text{(Subtraktion)}$$

(c) $$\frac{((x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y)) - (x \cdot y)}{x \cdot y} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \qquad \text{(Multiplikation)}$$

(d) $$\frac{((x + \Delta x)/(y + \Delta y)) - (x/y)}{x/y} \approx \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} \qquad \text{(Division)}$$

Falls der relative Fehler des Ergebnisses sehr viel grösser ist, als der relative Fehler der Eingabedaten, so spricht man von Auslöschung. In welchen der obigen Fällen kann Auslöschung auftreten?

Hinweis. *Produkte von Rundungsfehlern, d.h. $\Delta x \cdot \Delta x$, $\Delta x \cdot \Delta y$ und $\Delta y \cdot \Delta y$, können Sie vernachlässigen.*

Aufgabe 3 (Binärsystem | 4 Punkte).

Das Zahlsystem zur Basis 2 wird *Binärsystem* genannt.

(a) Bestimmen Sie zu den folgenden Dezimalzahlen die Koeffizienten c_j und d_j gemäss (1.3) im Skript:

$$7, \qquad 1.25, \qquad 0.703125, \qquad 666.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Dezimalzahl $\frac{1}{3}$ im Binärsystem die periodische Darstellung

$$0.\overline{01} = 0.010101010101010101...$$

besitzt.

Aufgabe* 4 (Matrixnormen | 4 Punkte).

(a) Seien V, W Vektorräume und $\Phi : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus. Weiter sei $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf V. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$\|\cdot\|_W : w \longmapsto \|\Phi^{-1}(w)\|_V$$

eine Norm auf W erklärt wird.

(b) Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent sind.

Hinweis. *Benutzen Sie dazu Teil (a) und die Äquivalenz aller Normen auf* $\mathbb{R}^{n^2}$.

Aufgabe* 5 (induzierte Normen | 4 Punkte).

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$|||\mathbf{A}||| := \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

die sogenannte *induzierte Norm* von $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Überprüfen Sie, dass $|||\cdot|||$ tatsächlich eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $|||\mathbf{A}|||$ die kleinste aller Zahlen $C > 0$ ist, so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq C\|\mathbf{x}\|$ gilt.

Aufgabe* 6 (Finite Differenzen | 4 Punkte).

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Um für $x_0 \in (a,b)$ eine numerische Approximation an die Ableitung $f'(x_0)$ zu erhalten, berechnen wir für hinreichend kleines $h > 0$ die *Vorwärtsdifferenz* bzw. die *zentrale Differenz* durch

$$(\delta_h^+ f)(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{bzw.} \quad (\delta_h^0 f)(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Vorwärtsdifferenz gilt

$$\left|f'(x_0) - (\delta_h^+ f)(x_0)\right| \leq Ch \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{2} \max_{t\in[a,b]} \left|f''(t)\right|.$$

Dies bedeutet, dass die Vorwärtsdifferenz die Ableitung von f linear in h approximiert. Weisen Sie weiter nach, dass die zentrale Differenz sogar quadratisch in h approximiert, d.h. es gilt

$$\left|f'(x_0) - (\delta_h^0 f)(x_0)\right| \leq Ch^2 \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{6} \max_{t\in[a,b]} \left|f'''(t)\right|.$$

Hinweis. *Benutzen Sie den Satz von Taylor mit einem Lagrange-Restglied: Für eine n-Mal stetig differenzierbare Funktion f und $h > 0$, gilt für ein $t \in (0, h)$, dass*

$$f(x_0 \pm h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\pm h)^k + \frac{f^{(n)}(x_0 \pm t)}{n!}(\pm h)^n.$$

(b) Gegeben sei auf dem Intervall $[0, 2]$ die Funktion $f(x) = 3x^4 - 2x^2$ und $x_0 = 1$. Wie gross darf h gewählt werden, damit der Fehler in der Vorwärtsdifferenz kleiner als 10^{-6} wird? Wie gross darf h gewählt werden im Fall der zentralen Differenz?

Programmieraufgabe 7 (8 Punkte).

Das MATLAB-Livescript mit der Aufgabenstellung finden Sie auf der Webseite der Vorlesung. Reichen Sie bitte Ihre Lösung der Programmieraufgabe als ein komplettiertes MATLAB-Livescript via ADAM und als Ausdruck einer exportierten `pdf`-Datei ein.

Informationen zu den Übungen

Die Übung zu der Vorlesung Einführung in die Numerik / Numerik für die Studierende der Naturwissenschaften besteht aus den Theorie- und Programmieraufgaben. Die Übungsaufgaben werden im Wochenrhythmus ausgegeben und der Abgabe und Korrektur folgend in den Übungsstunden besprochen. Die Abgabe Ihrer Bearbeitung erfolgt sowohl physisch als auch elektronisch. Reichen Sie bitte pro Abgabe folgende Dokumente ein:

- Ihre Lösungen zu den Theorieaufgaben, sowie einen ausgedruckten `pdf`-Export ihrer Programmieraufgaben im Briefkasten Ihres Assistenten oder zu Beginn der Vorlesung,
- Ihre Programmieraufgaben als komplettiertes MATLAB-Livescript elektronisch über das Abgabesystem von ADAM. Abgaben per E-Mail können leider nicht akzeptiert werden!

Bitte heften Sie Ihre Blätter zusammen und schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen, sowie den Vor- und Nachnamen Ihres Assistenten auf Ihre Abgabe!