Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Programmieraufgabe 4. zu bearbeiten bis **Dienstag, 24.5.2016**.

Wir betrachten die Stokessche Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0, && \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, && \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei ist, wie in der vorherigen Programmieraufgabe, $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ gegeben und $p \in L_0^2(\Omega)$ sowie $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ gesucht. Wir wollen jedoch anstelle des \-Lösers das Bramble-Pasciak-CG-Verfahren benutzen, um das aus der Diskretierung mit $\mathcal{P}_2$-$\mathcal{P}_1$-Elementen herrührende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \tag{1}$$

zu lösen.

Aufgabe 1. Implementieren Sie das Bramble-Pasciak-CG-Verfahren (siehe Vorlesung) in Matlab als

```
function [x,y] = BPCG(A,A_0,B,C,f,g,tol,Bq).
```

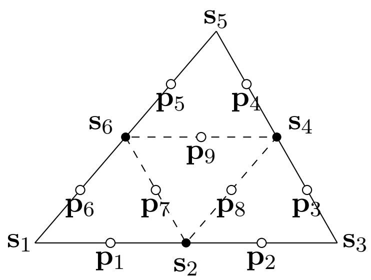
Lösen Sie die Stokessche Gleichung mit dem Bramble-Pasciak-CG. Setzen Sie dabei $\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{A}$ und verwenden Sie den \-Löser, um die Multiplikation mit $\mathbf{A}_0^{-1}$ zu berechnen. Vergewissern Sie sich, dass der Fehler $\|p - p_h\|_{L^2}$ weiterhin quadratisch konvergiert.

Offen bleibt noch die Frage, wie man $\mathbf{A}_0$ wählt. Eine Möglichkeit besteht darin, jede Multiplikation mit $\mathbf{A}_0^{-1}$ durch einige Schritte des Mehrgitterverfahrens zu ersetzen. Wir können das Mehrgitterverfahren aus dem letzten Semester verwenden. Allerdings müssen wir die Restriktion und Prolongation an die $\mathcal{P}^2$-Elemente anpassen. Daür benötigen wir die elementweise Restriktionsmatrix $\mathbf{R}$ und die Prolongationsmatrix $\mathbf{Q}$, die wie folgt definiert sind:

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{array} \right) = \mathbf{Q}^\top.$$

Hierbei ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^6$ und

$$\mathbf{S} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$



Diese Matrizen gehören jedoch zu der Numerierung der groben und feinen Knotenpunkte aus der Skizze, weswegen wir in der Restriktion und in der Prolongation noch eine Permutation der Knoten durchführen müssen.

Die Restriktion läuft nach folgendem Muster ab:

Input : Elementlisten $\mathbf{F}$, Randbedingungen $\mathbf{B}$, zu restringierender Vektor $\mathbf{v}$, Diskretisierungslevel j

Output : restringierter Vektor $\mathbf{v}$

for $i = 1 : \texttt{size}(\mathbf{F}\{j-1\}, 1)$ **do**

Betrachte auf jedem Element nur die Seitenmittelpunkte des feinen Gitters

$\mathbf{P} = F\{j\}(4i-3 : 4i-1, 4 : 6)^\top$

Permutiere die Knotenpunkte:

$\mathbf{P} = \mathbf{P}(:)$

$\mathbf{P} = \mathbf{P}([1, 4, 5, 8, 9, 3, 2, 6, 7])$

Setze $\mathbf{a} = \mathbf{B}(\mathbf{P}). * \mathbf{v}(\mathbf{P})$ und $\mathbf{el} = \mathbf{F}\{j-1\}(i, :)$

Verteile die Werte an den feinen Knotenpunkten auf die groben Knotenpunkte: $\mathbf{v}(\mathbf{el}) = \mathbf{v}(\mathbf{el}) + 0.5 * \mathbf{B}(\mathbf{el}). * (\mathbf{S} * \mathbf{a})$

end

Lösche schliesslich alle überzähligen Einträge $\mathbf{v}(\texttt{max}(\texttt{max}(\mathbf{F}\{j-1\})) + 1 : \texttt{end})$

Die Prolongation ist gegeben durch:

Input : Elementlisten $\mathbf{F}$, Randbedingungen $\mathbf{B}$, zu prolongierender Vektor $\mathbf{v}$, Diskretisierungslevel j

Output : prolongierter Vektor $\mathbf{v}$

Füge zusätzliche Einträge $\mathbf{v}(\texttt{end} + 1 : \texttt{max}(\texttt{max}(\mathbf{F}\{j\}))$ hinzu

for $i = 1 : \texttt{size}(\mathbf{F}\{j-1\}, 1)$ **do**

Betrachte auf jedem Element nur die Seitenmittelpunkte des feinen Gitters

$\mathbf{P} = F\{j\}(4i-3 : 4i-1, 4 : 6)^\top$

Permutiere die Knotenpunkte:

$\mathbf{P} = \mathbf{P}(:)$

$\mathbf{P} = \mathbf{P}([1, 4, 5, 8, 9, 3, 2, 6, 7])$

Setze $\mathbf{a} = \mathbf{v}(\mathbf{F}\{j-1\}(i, :))$

Verteile die Werte an den groben Knotenpunkten auf die feinen Knotenpunkte: $\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{P}) + [0.5 * \mathbf{B}(\mathbf{P}(1:6)); 1; 1; 1]. * (\mathbf{S}^\top * \mathbf{a})$

end

Aufgabe 2. Implementieren Sie das Mehrgitterverfahren für quadratische Finite Elemente. Testen Sie Ihre Implementierung am Poisson-Problem

$$-\Delta u = f$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und der rechten Seite $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ zur exakten Lösung $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ auf dem Einheitsquadrat. Benutzen Sie als Vorglätter das Vorwärts- und als Nachglätter das Rückwärts-Gauss-Seidel-Verfahren mit jeweils fünf Glättungsschritten. Bestätigen Sie, dass der Fehler $\|u - u_h\|_{L^2}$ quadratisch konvergiert. Verifizieren Sie ausserdem, dass bei der Lösungsgenauigkeit 10^{-4} die Anzahl der Iterationen ab dem fünften Level stagniert.

Aufgabe 3. Kombinieren Sie das Bramble-Pasciak-CG und das Mehrgitterverfahren, indem Sie im Bramble-Pasciak-CG jede Multiplikation mit $\mathbf{A}_0^{-1}$ durch 3 Schritte des Mehrgitterverfahrens angewendet auf die Matrix $0.9 \cdot \mathbf{A}$ mit dem Startvektor $\mathbf{0}$ ersetzen. Zeigen Sie, dass für die Stokessche Gleichung der Fehler $\|p - p_h\|_{L^2}$ weiterhin quadratisch konvergiert.