

Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht



Programmieraufgabe 2.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 12.4.2016.**

Wir betrachten in dieser Aufgabe das Poisson-Problem in der dual-gemischten Formulierung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \nabla p(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ p(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

welches wir mit Raviart-Thomas-Elementen diskretisieren und lösen wollen.

Der Raum der Raviart-Thomas-Elemente ist definiert als

$$RT(\mathcal{T}_h) := \left\{ \mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_h(x, y)|_T = (a_T, b_T) + c_T(x, y), \ a_T, b_T, c_T \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{n} \rangle \text{ ist stetig an den Elementengrenzen} \right\}.$$

Ausserdem sei

$$V_h = \{p \in L^2(\Omega) : p|_T \in \mathcal{P}_0 \ \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset V = L^2(\Omega)$$

der Raum der elementweise konstanten Funktionen. Die Variationsformulierung von (1) lautet dann:

Finde $(p_h, \mathbf{v}_h) \in V_h \times RT(\mathcal{T}_h)$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \rangle \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} q_h f \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2)$$

für alle $(q_h, \mathbf{w}_h) \in V_h \times RT(\mathcal{T}_h)$.

Um in einer Implementierung die Stetigkeit der Raviart-Thomas-Elemente an den Elementengrenzen zu garantieren, müssen wir etwas in die Trickkiste greifen. Dafür benötigen wir die *Sprungfunktion* J_E :

Seien \mathcal{E} die Menge der Kanten der Triangulierung \mathcal{T}_h und \mathbf{n}_E die Einheitsnormale einer Kante $E \in \mathcal{E}$, die nicht auf dem Rand Γ liegt. Für eine bezüglich \mathcal{T}_h stückweise konstante Funktion $\mathbf{u}_h \in [L^2(\Omega)]^2$ ist der *Sprung* $J_E := [\langle \mathbf{u}_h, \mathbf{n}_E \rangle]$ von \mathbf{u}_h über E in Richtung \mathbf{n}_E definiert als

$$[\langle \mathbf{u}_h, \mathbf{n}_E \rangle] := \langle \mathbf{u}_h|_{T_+} - \mathbf{u}_h|_{T_-}, \mathbf{n}_E \rangle.$$

Hierbei sind $T_+, T_- \in \mathcal{T}_h$ die beiden zur Kante E gehörigen Dreiecke, d.h. $E = T_+ \cap T_-$, wobei \mathbf{n}_E von T_+ nach T_- zeigt (siehe Abb. 1). Wir definieren als T_+ dasjenige Dreieck, auf dem E in Richtung der Orientierung der Eckpunkte liegt. Für eine Kante E auf Γ definieren wir $J_E := 0$. Die Funktion \mathbf{u}_h ist offensichtlich genau dann auf einer Kante E stetig, wenn $J_E = 0$ ist.

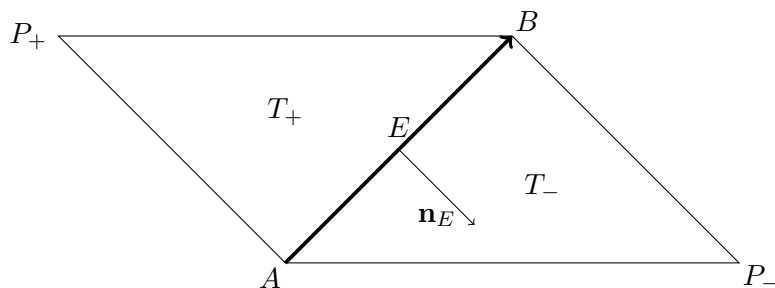


Abbildung 1: Dreiecke $T_+ = \triangle(A, B, P_+)$ und $T_- = \triangle(A, P_-, B)$ mit gemeinsamer Kante $E = \overline{AB}$.

Um mit der Sprungfunktion die Stetigkeit von $\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{n} \rangle$ auf den Kanten zu erzwingen, können wir *Lagrange-Multiplikatoren* einführen: Wir fügen in (2) einen Ausdruck der Form

$$- \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E [\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{n}_E \rangle] \lambda_h ds = 0$$

für alle

$$\lambda_h \in \Lambda_h := \{ \lambda \in L^2(\mathcal{E}) : \forall E \in \mathcal{E}, \lambda|_E \in \mathcal{P}_0(\mathcal{E}), \lambda|_{\partial\Omega} \equiv 0 \}$$

ein, der erzwingt, dass $\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{n} \rangle$ stetig an den Elementengrenzen ist. Die stückweise konstanten Funktionen in Λ_h heissen *Lagrange-Multiplikatoren*. De facto ändern wir dadurch nichts an der Gleichung selbst, sondern suchen uns nur eine spezielle Lösung aus. Aber der Ausdruck erlaubt uns, die Stetigkeitsbedingung in $RT(\mathcal{T}_h)$ fallen zu lassen. In der Variationsformulierung können wir also $RT(\mathcal{T}_h)$ ersetzen durch

$$R_h := \left\{ \mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}(x, y)|_T = (a_T, b_T) + c_T(x, y), a_T, b_T, c_T \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Die neue Variationsformulierung lautet nun:

Finde $(p_h, \mathbf{v}_h, \lambda_h) \in V_h \times R_h \times \Lambda_h$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h d\mathbf{x} - \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E [\langle \mathbf{w}_h, \mathbf{n}_E \rangle] \lambda_h ds &= 0, \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} q_h f d\mathbf{x}, \\ - \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E [\langle \mathbf{w}_h, \mathbf{n}_E \rangle] \mu_h ds &= 0, \end{aligned}$$

für alle $(q_h, \mathbf{w}_h, \mu_h) \in V_h \times R_h \times \Lambda_h$.

Ziel ist es, diese Gleichungen in ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3)$$

zu überführen. Um die Integrale auszuwerten, verwenden wir für die Raviart-Thomas-Elemente auf jedem Dreieck T mit Schwerpunkt (x_T, y_T) die Formfunktionen

$$\varphi_1(x, y) = (1, 0), \quad \varphi_2(x, y) = (0, 1), \quad \varphi_3(x, y) = (x - x_T, y - y_T).$$

Zu beachten ist, dass in \mathbf{x}_v die Koeffizienten der drei Formfunktionen stehen werden, das heisst, wir erhalten für das Dreieck T_j mit

$$[a_T, b_T, c_T] := [\mathbf{x}_v(3 \cdot (j - 1) + 1), \mathbf{x}_v(3 \cdot (j - 1) + 2), \mathbf{x}_v(3 \cdot (j - 1) + 3)]$$

und einem beliebigen Eckpunkt (x_0, y_0) des Dreiecks, dass

$$\mathbf{v}_h|_{T_j} \equiv (a_T, b_T) + c_T(x_0 - x_T, y_0 - y_T).$$

Die Elementmatrizen \mathbf{M} , \mathbf{C} und \mathbf{D} in (3) ergeben sich wie folgt:

Für jedes Dreieck T sind die lokalen Elementmatrizen $\mathbf{M}_T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\mathbf{C}_T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ gegeben durch

$$(\mathbf{M}_T)_{jk} := \int_T \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \, d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{C}_T)_j := \int_T \operatorname{div} \varphi_j \, d\mathbf{x}, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

sodass

$$\mathbf{M}_T = |T| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s/36 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_T = 2|T| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist der Wert s für die Eckpunkte $\mathbf{z}_i = (x_i, y_i)$ des Dreiecks T definiert als

$$s := \|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1\|_2^2 + \|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2\|_2^2 + \|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\|_2^2.$$

Damit können $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3N \times N}$ zusammengesetzt werden gemäss

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{T_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{T_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{T_N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{T_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{T_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{T_N} \end{pmatrix}.$$

Für jede Kante E_k , $k = 1, \dots, K$, ist ein lokaler Elementvektor $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^6$ der Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3N \times K}$ gegeben durch

$$[\mathbf{d}_k]_j = - \int_{E_k} \langle \varphi_j, \mathbf{n}_{E_k} \rangle \, ds, \quad j = 1, \dots, 6,$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Basisfunktionen in $RT(T_+)$ und $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ die Basisfunktionen in $RT(T_-)$ bezeichnen. Mit der Notation und der Orientierung aus Abbildung 1 definieren wir

$$\mathbf{e}_k := (e_{k,x}, e_{k,y}) := \vec{B} - \vec{A} \in \mathbb{R}^2$$

für die Kante E_k mit den Knotenpunkten A und B und Einheitsnormale $\mathbf{n}_k = (e_{k,y}, -e_{k,x})/|E_k| \in \mathbb{R}^2$. Ausserdem sei $h_{T_\pm} := \langle (y_{T_\pm} - a_2, a_1 - x_{T_\pm}), \mathbf{e}_k \rangle$. Dann sind

$$[\mathbf{d}_k]_1 = -[\mathbf{d}_k]_4 = - \int_{E_k} \langle \varphi_1, \mathbf{n}_{E_k} \rangle \, ds = - \int_{E_k} \frac{e_{k,y}}{|E_k|} \, ds = -e_{k,y},$$

$$[\mathbf{d}_k]_2 = -[\mathbf{d}_k]_5 = - \int_{E_k} \langle \varphi_2, \mathbf{n}_{E_k} \rangle \, ds = - \int_{E_k} \frac{-e_{k,x}}{|E_k|} \, ds = e_{k,x},$$

$$[\mathbf{d}_k]_3 = - \int_{E_k} \langle \varphi_3, \mathbf{n}_{E_k} \rangle \, ds = - \int_{E_k} \frac{1}{|E_k|} \langle (y_{T_+} - y, x - x_{T_+}), \mathbf{e}_k \rangle \, ds = -h_{T_+},$$

$$[\mathbf{d}_k]_6 = h_{T_-},$$

das heisst, es ist

$$\mathbf{d}_k = [-e_{k,y}, e_{k,x}, -h_{T_+}, e_{k,y}, -e_{k,x}, h_{T_-}]^\top.$$

Sind die Eckpunkte der Dreiecke T_+ und T_- in einer Punktliste gegeben durch die Indizes s_1^\pm, s_2^\pm und s_3^\pm , erhalten wir

$$\mathbf{D}([s_1^+, s_2^+, s_3^+, s_1^-, s_2^-, s_3^-], k) = \mathbf{d}_k.$$

Schliesslich berechnen wir die rechte Seite \mathbf{b}_f , indem wir die Mittelpunkregel anwenden, um die Integrale

$$[\mathbf{b}_f]_i = - \int_{T_i} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, N$$

anzunähern.

Aufgabe 1. Schreiben Sie eine Funktion

```
function [A, b] = mfem(P, F, f),
```

das eine Punktliste \mathbf{P} , eine Elementliste \mathbf{F} und eine Funktion f als Input hat und eine Matrix \mathbf{A} sowie einen Vektor \mathbf{b} generiert, die das Gleichungssystem (3) durch $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bilden.

Hinweis: Um die Matrix \mathbf{D} zu assemblieren, ist eine Liste der Kanten mit den jeweils angrenzenden Dreiecken T_+ und T_- hilfreich. Sie können folgenden Algorithmus benutzen, um solch eine Liste zu generieren:

Input : Elementliste \mathbf{F}

Output : Liste mit Kanten und Dreiecken \mathbf{L}

setze $n := \max(\max(\mathbf{F}))$

initialisiere $\mathbf{A} := \text{zeros}(n)$, $\mathbf{E} := \text{eye}(3)$

for $i = 1 : \text{size}(\mathbf{F}, 1)$ **do**

$\mathbf{A}(\mathbf{F}(i, :), \mathbf{F}(i, [2, 3, 1])) := \mathbf{A}(\mathbf{F}(i, :), \mathbf{F}(i, [2, 3, 1])) + i\mathbf{E}$

end

setze $\mathbf{B} := \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$

finde die Zeilen- und Spaltenindizes \mathbf{I} und \mathbf{J} aller Nicht-Nulleinträge in der rechten oberen Hälfte von \mathbf{B}

setze $m := \text{size}(\mathbf{I}, 1)$

setze $\mathbf{C} := \text{sparse}(\mathbf{I}, \mathbf{J}, 1 : m, n, n)$ und $\mathbf{C} := \mathbf{C} + \mathbf{C}^\top$

initialisiere $\mathbf{L} := \text{zeros}(m, 4)$

for $i = 1 : \text{size}(\mathbf{F}, 1)$ **do**

for $j = 1 : 3$ **do**

$s := \mathbf{F}(i, j)$

$e := \mathbf{F}(i, 1 + j \bmod 3)$

$c := \mathbf{C}(s, e)$

if $\mathbf{L}(c, 1) = 0$ **then**

$\mathbf{L}(c, :) = [s, e, \mathbf{A}(s, e), \mathbf{A}(e, s)]$

end

end

end

In der k -ten Zeile von \mathbf{L} stehen in der 1. und der 2. Spalte der Anfangs- und der Endpunkt von E_k , und in der 3. und der 4. Spalte die benachbarten Dreiecke T_+ und T_- .

Aufgabe 2. Testen Sie ihre Funktion auf dem Einheitsquadrat mit der rechten Seite $f(\mathbf{x}) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ und der exakten Lösung $p(\mathbf{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Benutzen Sie den \-Löser, um das Gleichungssystem (3) zu lösen. Visualisieren Sie Ihre Lösung, indem Sie Ihre Funktion `visfunc` so anpassen, dass sie sowohl die approximierte Funktion p wie auch deren Gradienten $\mathbf{v} = (p_x, p_y)$ darstellen kann.

Aufgabe 3. Verifizieren Sie, dass Ihre Lösung linear konvergiert. Approximieren Sie dabei den L^2 -Fehler $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ mithilfe der Trapezregel.

Aufgabe 4. Stellen Sie den Fluss der Lösung dar, indem Sie den Befehl `quiver` benutzen.