Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 9.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 3.5.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. ($\mathcal{P}_1$-$\mathcal{P}_0$-Element)

Das Gebiet $(0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ sei mit einem gleichmässigen Dreiecksgitter der Schrittweite h überzogen. Betrachten Sie die Finite-Element-Räume

$$U_h = \{\mathbf{v} \in [C(\overline{\Omega})]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_T \in \mathcal{P}_1\}$$
$$V_h = \{p \in L_0^2(\Omega) : p|_T \in \mathcal{P}_0\}.$$

Zeigen Sie, dass eine Diskretisierung der Stokes-Gleichung mit diesen Elementen instabil ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Mehrgitterverfahren mit quadratischen Finiten Elementen)

Wir betrachten die Diskretisierung eines polygonalen Gebiets mit quadratischen Finiten Elementen auf durch Verfeinerung entstandenen, geschachtelten Dreiecksnetzen. Dabei sei die Verfeinerung durch die Unterteilung eines jeden Dreiecks in vier kongruente Dreiecke gegeben. Geben Sie die elementweisen Prolongations- und Restriktionsoperatoren an, welche für das entprechende Mehrgitterverfahren benötigt werden.

Hinweis. Betrachten Sie zuerst nur das Referenzelement.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Potenzmethode)

Gegen sei eine reelle, symmetrisch positiv definite Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit paaweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Startvektor $\mathbf{x} \neq 0$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{A}^k\mathbf{x}\|} = \lambda_1.$$

Zeigen Sie ferner, dass die Konvergenz linear ist, das heisst, es gilt für $q = \lambda_2/\lambda_1$

$$\frac{\|\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{A}^k\mathbf{x}\|} = \lambda_1 + \mathcal{O}(q^k), \quad k \to \infty.$$

Das bedeutet insbesondere, dass die Konvergenzgeschwindigkeit von der Lücke zwischen dem grössten und dem zweitgrössten Eigenwert abhängt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Kondition des Eigenwertproblems)

Zeigen Sie, dass die Kondition des Eigenwertproblems für Matrizen beliebig gross werden kann. Zeigen Sie also, dass es keine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für eine Matrix $\mathbf{A}$ und ihre gestörte Version $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\frac{\big|\lambda_k(\mathbf{A}) - \lambda_k(\tilde{\mathbf{A}})\big|}{|\lambda_k(\mathbf{A})|} \leq c\frac{\|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

gilt.

Hinweis. Betrachten Sie die Frobenius-Begleitmatrizen zu den Polynomen $p_0(\lambda) = (\lambda - a)^n$ und $p_\varepsilon(\lambda) = (\lambda - a)^n + \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$.

(4 Punkte)