Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 5.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 5.4.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Neumann-Problem)

Betrachten Sie das Neumann-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne wie gewöhnlich $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, Γ dessen Rand und $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ den nach aussen gerichteten, normierten Normalenvektor.

a) Wie lautet die Kompatibilitätsbedingung für das Neumann-Problem, die überhaupt erst die Existenz einer Lösung ermöglicht? Leiten Sie diese her. Was muss man zusätzlich fordern, um eine eindeutige Lösung zu erhalten?

b) Die Voraussetzung für die Existenz einer eindeutigen Lösung lässt sich als explizite Nebenbedingung formulieren, so dass sich insgesamt ein Sattelpunktproblem für das Neumann-Problem ergibt. Stellen Sie dieses auf.

   Hinweis. Benutzen Sie Lagrange-Multiplikatoren.

c) Gegeben sei die Poincaré-Friedrichssche Ungleichung

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(\left|\int_\Omega v \mathrm{d}\mathbf{x}\right| + |v|_{H^1(\Omega)}\right), \quad v \in H^1(\Omega),$$

   mit einer nur von Ω abhängigen Konstante $c > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Spursatzes, dass das Problem aus der vorherigen Aufgabe eine eindeutige Lösung besitzt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Fixieren von Konstanten)

Zeigen Sie, dass unter allen Repräsentanten $q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ diejenige Funktion q die kleinste L^2-Norm aufweist, deren Mittelwert verschwindet, also für die $\int_\Omega q \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$ gilt. Mit anderen Worten, die Funktion q ist durch

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q + c\|_{L^2(\Omega)}$$

charakterisiert. Dies bedeutet folglich, dass $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ und $L^2_0(\Omega)$ isometrisch sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (LBB-Bedingungen in endlichen Dimensionen)

Wir wollen die LBB-Bedingungen im endlichdimensionalen verstehen. Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\intercal \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Systemmatrix genau dann invertierbar sein kann, wenn $m \leq n$ gilt. Nehmen Sie dies in den folgenden Aufgaben an.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{B}$ genau dann vollen Rang hat, wenn der m-te Singulärwert von $\mathbf{B}$ grösser als Null ist.

c) Gegeben sei die Bilinearform $b(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^\intercal \mathbf{B} \mathbf{v}$. Zeigen Sie, dass b die LBB-Bedingung genau dann erfüllt, wenn der m-te Singulärwert von $\mathbf{B}$ nicht verschwindet. Die grösstmögliche Konstante der LBB-Bedingung ist gerade dieser m-te Singulärwert.

d) Folgern Sie, dass das Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn b die LBB-Bedingung erfüllt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Fortin-Kriterium)

Wir betrachten die primal-gemischte Formulierung des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{L^2(\Omega)} - (\nabla p, \mathbf{w})_{L^2(\Omega)} &= 0 && \text{für alle } \mathbf{w} \in [L^2(\Omega)]^d, \\ (\mathbf{v}, \nabla q)_{L^2(\Omega)} &= (f, q)_{L^2(\Omega)} && \text{für alle } q \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Für eine quasi-uniforme Triangulierung von Ω werde im folgenden der Fluss $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d$ mittels elementweise konstanten Ansatzfunktionen diskretisiert und das Druckpotential $p \in H_0^1(\Omega)$ mittels elementweise linearen, global stetigen Ansatzfunktionen. Weisen Sie mittels Fortin-Kriterium die eindeutige Lösbarkeit des diskretisierten Problems nach.

Hinweis. Benutzen Sie die L^2-Orthoprojektion $\Pi_h \mathbf{u} \in [S_h^0(\Omega)]^d$ von $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^d$, die definiert ist als Lösung des Variationsproblems

Suche $\mathbf{u} \in [S_h^0(\Omega)]^d$, so dass $(\Pi_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)_{L^2(\Omega)}$ für alle $\mathbf{v}_h \in [S_h^0(\Omega)]^d$.

Hierbei bezeichne $S_h^0(\Omega)$ der Raum der elementweise konstanten Ansatzfunktionen auf Ω.

(4 Punkte)