Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

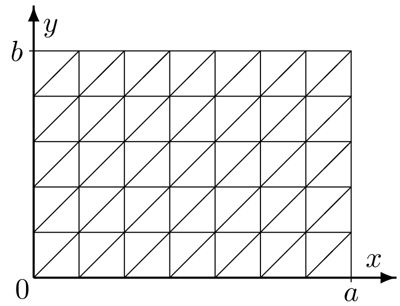
Universität Basel

Übungsblatt 2.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 8.3.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (Crouzeix-Raviart-Element)

Das Crouzeix-Raviart-Element hat wie das konforme $\mathcal{P}_1$-Element lokal drei Freiheitsgrade. Zeigen Sie, dass die Anzahl der globalen Freiheitsgrade auf einem Rechtecksgitter der Form



dennoch ungefähr dreimal so gross ist, wie im konformen Fall.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Crouzeix-Raviart-Element II)

Zeigen Sie, dass die globalen, nodalen Basisfunktionen der Crouzeix-Raviart-Elemente orthogonal bezüglich des L^2-Skalarprodukts sind. Bestimmen sie dafür die lokale Massematrix und schliessen Sie auf die Behauptung.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Nichtkonforme Elemente)

Sei V_h der Raum der nichtkonformen $\mathcal{P}_1$-Elemente bezüglich der Triangulierung $\mathcal{T}_h$. Ferner sei $\mathcal{S}_h \subset H_0^1(\Omega)$ der Raum der konformen, quadratischen Langrange-Elemente bezüglich derselben Triangulierung. Zusätzlich sei $E_h : V_h \to \mathcal{S}_h$ definiert durch

(i) $(E_h v)(m) = v(m)$, falls m ein Kantenmittelpunkt ist,

(ii) $(E_h v)(p) =$ Mittelwert über alle, zum Eckpunkt p adjazenter Kantenmittelpunkte,

sowie $F_h : \mathcal{S}_h \to V_h$ definiert durch

$$(F_h v)(m) = v(m), \text{ falls } m \text{ ein Kantenmittelpunkt ist.}$$

Zeigen Sie:

a) $F_h E_h v = v$ für alle $v \in V_h$.

b) $\|v - E_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|v\|_{V_h}$ für alle $v \in V_h$ und ein $C > 0$.

c) $\|v - F_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch|v|_{H^1(\Omega)}$ für alle $v \in \mathcal{S}_h$ und ein $C > 0$.

Aufgabe 4. (Poincaré-Friedrichssche-Ungleichung)

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 die folgende Variante der Poincaré-Friedrichsschen-Ungleichung für nichtkonforme $\mathcal{P}_1$-Elemente:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{V_h} \text{ für alle } v \in V_h \text{ und ein } C > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Poincaré-Friedrichssche-Ungleichung und die inverse Abschätzung für konforme Finite Elemente.