Nichtkonforme und gemischte Finite-Element-Methoden

Frühlingssemester 2016
Prof. Dr. H. Harbrecht

Universität Basel

Übungsblatt 12.

zu bearbeiten bis **Dienstag, 31.5.2016, 10:15 Uhr**.

Aufgabe 1. (zweite Ableitungen der Verschiebung)

Zeigen Sie die Identität

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \varepsilon_{j,k}(\mathbf{u})}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{i,k}(\mathbf{u})}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{i,j}(\mathbf{u})}{\partial x_k}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Raum der Starrkörperbewegungen)

Gegeben sei der Raum der Starrkörperbewegungen

$$\mathcal{R} = \Big\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{d} \colon \mathbf{B} = -\mathbf{B}^\intercal,\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d},\ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^d \Big\}.$$

Zeigen Sie für $d = 2, 3$, dass $\mathcal{R}$ alle Drehungen enthält. Schliessen Sie daraus, dass für $d = 2$

$$\mathcal{R} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \right\}$$

und für $d = 3$

$$\mathcal{R} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \right\}$$

gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Lineare Elastizität mit Neumann-Randbedingungen)

Wir haben gesehen, dass das Lineare Elastizitätsproblem mit Neumann-Daten auf dem orthogonalen Komplement der Starrkörperbewegungen eindeutig lösbar ist. In der Vorlesung wurde deshalb mit Lagrange-Multiplikatoren eine elliptische Bilinearform hergeleitet. Man kann das Problem mittels Lagrange-Multiplikatoren allerdings auch als Sattelpunktproblem schreiben. Stellen Sie dieses auf, und zeigen Sie dessen eindeutige Lösbarkeit.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Locking)

Unter einem beinahe inkompressiblen Material versteht man ein Material mit einer Poisson-Zahl ν nahe bei $1/2$. Inwieweit könnte in numerischen Berechnungen für beinahe inkompressiblen Materialien der Fall $\nu \to 1/2$ zu einem Problem werden?

(4 Punkte)