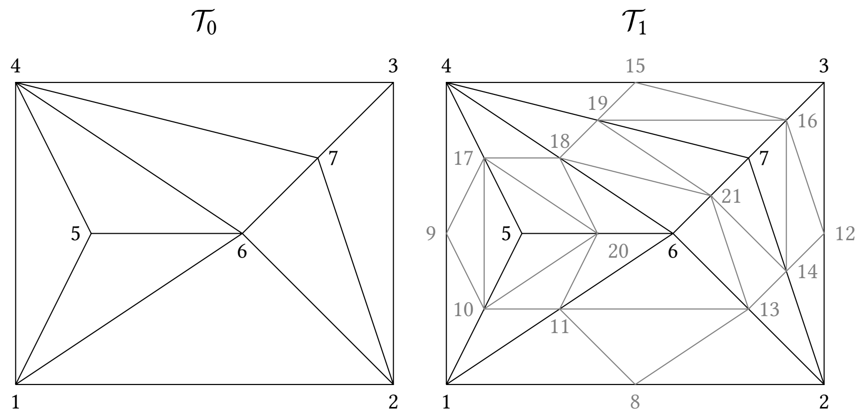
Übungsblatt 9.

Abgabe bis: **Donnerstag, 24.11.2022, 18:00**

Aufgabe 1 (Prolongation und Restriktion | 4 Punkte).

Geben Sie die Prolongations- und Restriktionsmatrizen $\mathbf{I}_0^1$ und $\mathbf{I}_1^0$ zwischen den Finite-Elemente-Räumen der stetigen, stückweise linearen Ansatzfunktionen auf den folgenden geschachtelten Dreiecksnetzen an.



Aufgabe 2 (gedämpftes Jacobi-Verfahren | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ die Systemmatrix aus der Diskretisierung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat zu homogenen Randbedingungen. Dann ist die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens gegeben durch

$$\mathbf{S} = (1 - \omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren des gedämpften Jacobi-Verfahrens.

(b) Betrachten Sie nun das gedämpfte Jacobi-Verfahren für $n = 32$ mit $\omega = 2/3$. Welche Frequenzen sind nach 10 Iterationsschritten um weniger als den Faktor 2 geglättet?

Aufgabe 3 (Glättungseigenschaft I | 4 Punkte).

Im Folgenden soll die Glättungseigenschaft des gedämpften Jacobi- sowie des gedämpften Gauß-Seidel-Verfahrens gezeigt werden. Die Iterationsmatrix des letztgenannten Verfahrens ist gegeben durch

$$\mathbf{S} = (1 - \omega)\mathbf{I} + \omega(\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Zerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$, bezüglich der sich die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens mit $\omega = 1/2$ schreiben lässt als

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$

Wie lauten die entsprechenden Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ für das gedämpfte Gauß-Seidel-Verfahren, ebenfalls mit $\omega = 1/2$?

(b) Nehmen Sie weiter an, dass $\mathbf{A}$ schwach diagonaldominant ist, das bedeutet

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{M}$ regulär ist und $\left\|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\right\|_\infty \leq 1$ gilt.

Aufgabe 4 (Glättungseigenschaft II | 4 Punkte).

Zeigen Sie die Glättungseigenschaft des gedämpften Jacobi- und des gedämpften Gauß-Seidel-Verfahrens unter den Voraussetzungen der vorangegangenen Aufgabe, das heisst, zeigen Sie

$$\left\|\mathbf{A}\mathbf{S}^K\right\|_\infty \leq C_\mathrm{S} \frac{1}{\sqrt{K}} h^{-2}.$$

Hierzu gelte zusätzlich noch

$$\|\mathbf{M}\|_\infty \leq c h^{-2},$$

wobei h die Gitterweite der entsprechenden Diskretisierung bezeichne.

Hinweis. *Benutzen Sie für den Beweis der Glättungseigenschaft, dass für jede quadratische Matrix* $\mathbf{B}$ *mit* $\|\mathbf{B}\|_\infty \leq 1$ *gilt*

$$\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B})^K\right\|_\infty \leq 2^{K+1} \sqrt{\frac{2}{\pi K}} \quad \textit{für alle } K \geq 1.$$