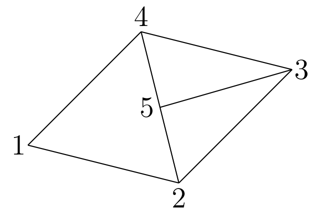
Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Freitag, 15.11.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (hängende Knoten | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei folgendes Finite-Elemente-Netz mit einem hängenden Knoten:



Auf dem Netz betrachten wir eine Diskretisierung der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und der rechten Seite $\ell(\cdot)$ mit stetigen, stückweise linearen Finiten Elementen. Folglich ist der Funktionswert am Knoten 5 als Durchschnitt der Funktionswerte der Knoten 2 und 4 gegeben.

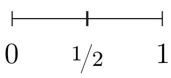
Stellen Sie das lineare (5×5)-Gleichungssystem der Finite-Elemente-Diskretisierung auf, und formen Sie es in ein äquivalentes (4×4)-Gleichungssystem um.

Aufgabe 2 (innere Kondensation | 4 Punkte)**.**

Zur Diskretisierung der Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } (0,1)$$

betrachten wir stetige, stückweise quadratische Finite Elemente auf folgender Unterteilung:



(a) Bestimmen Sie die Formfunktionen auf dem Referenzelement $[0,1]$.

(b) Wir diskretisieren die Variationsformulierung. Stellen Sie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ in dem zu lösenden Gleichungssystem $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ explizit auf, indem Sie zuerst die lokalen Steifigkeitsmatrizen und dann die globale Steifigkeitsmatrix aufstellen.

(c) Zeigen Sie, dass man die Freiheitsgrade im Innern der Elemente eliminieren kann, sodass aus dem (5×5)-Gleichungssystem ein (3×3)-Gleichungssystem wird. Schreiben Sie das reduzierte Gleichungssystem und die Berechnung der eliminierten Freiheitsgrade auf.

Aufgabe 3 (Tridiagonalmatrizen | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\operatorname{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Beweisen Sie ferner, dass für die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Darstellung

$$[\mathbf{v}_k]_i = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } i, k = 1, \dots, n$$

gilt, wobei $[\mathbf{v}_k]_i$ die i-te Komponente von $\mathbf{v}_k$ bezeichnet.

Aufgabe 4 (Eigenwerte des Laplace-Operators | 4 Punkte)**.**

Für zwei Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{r\times s}$ ist das Kronecker-Produkt $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definiert durch

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr\times ns}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem, das bei der Diskretisierung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega = (0,1)^2, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

durch den 5-Punkte-Finite-Differenzen-Stern zur Schrittweite $h = 1/n$ entsteht, sich schreiben lässt als

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{L})\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Dabei ist $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Einheitsmatrix und

$$\mathbf{L} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

die Diskretisierung des eindimensionalen Laplace-Operators.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren des zweidimensionalen, diskretisierten Laplace-Operators.