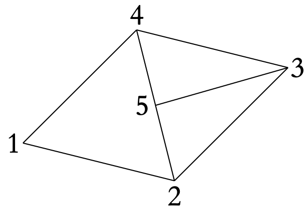
Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Freitag, 18.11.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (hängende Knoten | 4 Punkte).

Gegeben sei folgendes Finite-Elemente-Netz mit einem hängenden Knoten:



Auf dem Netz betrachten wir eine Diskretisierung der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und der rechten Seite $\ell(\cdot)$ mit stetigen, stückweise linearen Finiten Elementen. Folglich ist der Funktionswert am Knoten 5 als Durchschnitt der Funktionswerte der Knoten 2 und 4 gegeben.
Stellen Sie das lineare (5×5)-Gleichungssystem der Finite-Elemente-Diskretisierung auf, und formen Sie es in ein äquivalentes (4×4)-Gleichungssystem um.

Aufgabe 2 (Tridiagonalmatrizen | 4 Punkte).

Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\operatorname{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } k = 1,\dots,n.$$

Beweisen Sie ferner, dass für die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ die Darstellung

$$[\mathbf{v}_k]_i = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } i,k = 1,\dots,n$$

gilt, wobei $[\mathbf{v}_k]_i$ die i-te Komponente von $\mathbf{v}_k$ bezeichnet.

Aufgabe 3 (Eigenwerte des Laplace-Operators | 4 Punkte).

Für zwei Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{r\times s}$ ist das Kronecker-Produkt $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definiert durch

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr\times ns}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem, das bei der Diskretisierung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega = (0,1)^2, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

durch den 5-Punkte-Finite-Differenzen-Stern zur Schrittweite $h = 1/n$ entsteht, sich schreiben lässt als

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{L})\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Dabei ist $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Einheitsmatrix und

$$\mathbf{L} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

die Diskretisierung des eindimensionalen Laplace-Operators.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren des zweidimensionalen, diskretisierten Laplace-Operators.

Aufgabe 4 (Neumann Problem II | 4 Punkte).

Wie in der Aufgabenstellung von Aufgabe 1 auf Blatt 3 seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $x_1, \dots, x_N$, $V_N := \{\phi_i \mid \phi_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ mit } i, j = 1, \dots, N\}$ und die Variationsaufgabe

Finde $u \in \overline{H}^1(\Omega)$ s.d.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x =: b(u, v) = l(v) := \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g v \,\mathrm{d}\sigma \quad \text{f.a. } v \in \overline{H}^1(\Omega) \tag{1}$$

gegeben. In dieser Aufgabe wurde eine FE-Lösung der Variationsaufgabe in $V := \operatorname{span}(V_N) \cap \overline{H}^1(\Omega)$ gefunden, indem ein Lagrange-Multiplikator benutzt wurde.
Alternativ wird eine Lösung der Variationsaufgabe mit finiten Elementen approximiert, indem in der Variationsaufgabe (1) für ein $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ der Funktionenraum $\overline{H}^1(\Omega)$ durch $V_i := \{u \in \operatorname{span}(V_N) \mid u(x_i) = 0\}$ ersetzt wird, das heisst, der Wert im Knoten x_i fixiert wird.

(a) Wie sehen die Matrix und die Vektoren in der FE-Gleichung $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{l}$ mit $\mathbf{u} = [u(x_i)]_{i=1}^N$ und $u \in V_i$ aus, wenn V_i in (1) betrachtet wird? Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{B}$ symmetrisch positiv definit ist.

(b) Zeigen Sie, dass wenn $u \in V_i$ die Gleichung $b(u, v) = l(v)$ für alle $v \in V_i$ erfüllt, dann erfüllt u diese Gleichung für alle $v \in \operatorname{span}(V_N)$.

(c) Sei $u \in V_i$ derart, dass $b(u, v) = l(v)$ für alle $v \in V_i$. Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $\tilde{u} := u - c \in V$ die Gleichung $b(\tilde{u}, v) = l(v)$ für alle $v \in V$ erfüllt?